Comment vérifier numériquement que les premiers zéros non-triviaux de la fonction ζ de Riemann ont une partie réelle *exactement* égale à $\frac{1}{2}$?

Réalisé par Alexandre Goyer
Encadré par Marc Mezzarobba

La fonction ζ de Riemann

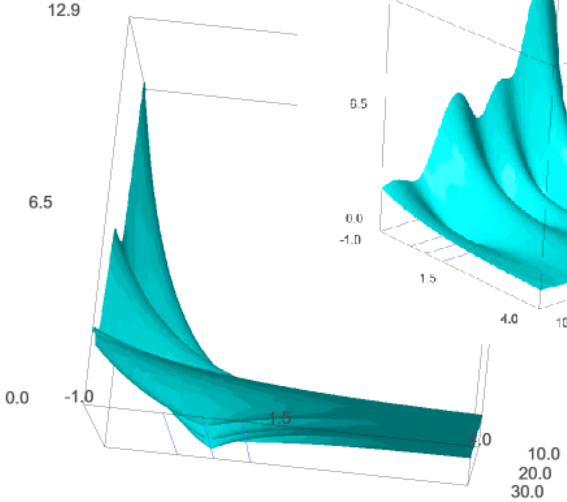
Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$:

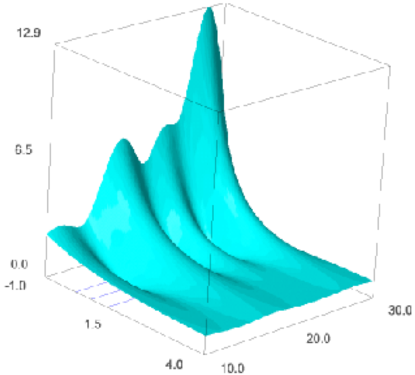
$$\zeta(s) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Proposition

La fonction ζ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un seul pôle simple en 1.

$|\zeta|$ dans le plan complexe





Sommaire

Première Partie

Arithmétique d'intervalles

La classe ComplexBallField

```
Init signature : ComplexBallField(self, precision=53)
Docstring :
An approximation of the field of complex numbers
using pairs of mid-rad intervals.
INPUT :
* "precision" - an integer >= 2.
```

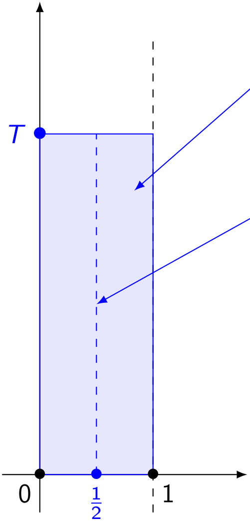
```
C = ComplexBallField(20)
a , b = C(2**(1/2)) , C(pi)
print a , b , a*b
```

```
[1.41421 +/- 4.14e-6] [3.14159 +/- 3.94e-6] [4.4429 +/- 4.50e-5]
```

Deuxième Partie

Idée de la preuve

Idée de la preuve



il y a N zéros de ζ dans la bande critique

ET

il y a *au moins* N zéros de ζ sur la droite critique

$\Downarrow$

tous les zéros de ζ dans la bande sont sur la droite !

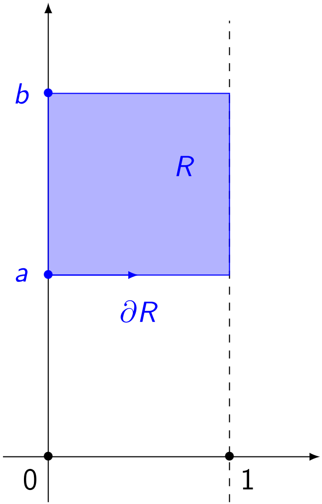
Nombre de zéros dans la bande

Pour $0 < a < b$ deux réels, le nombre de zéros dans la portion de bande

$$R = \left\{ \begin{array}{c} s \in \mathbb{C},\ 0 \leq \Re(s) \leq 1 \\ \text{et } a \leq \Im(s) \leq b \end{array} \right\}$$

est donnée par

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz\,.$$



La fonction Γ d'Euler

Pour s tel que $\Re(s) > 0$, on note :

$$\Gamma(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \,.$$

Proposition

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \Re(s) < 1$, on a :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \,.$$

Corollaire : Γ ne s'annule pas sur $\{0 < \Re < 1\}$.

La fonction χ

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$ et $s \neq 1$, on note :

$$\chi(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\,.$$

Proposition

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \Re(s) < 1$, on a :

$$\chi(s) = \chi(1-s).$$

Corollaire : Pour $t \in \mathbb{R}$, $\chi(\frac{1}{2} + it) \in \mathbb{R}$.

Troisième Partie

Comment calculer $\zeta(s)$?

La formule d'Euler et Maclaurin

Soient J, K, U trois entiers strictement positifs avec $K < U$.
Soit $f : [K, U] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^{2J}$. Alors :

$$\sum_{k=K}^{U} f(k) = \frac{1}{2}(f(K) + f(U)) + I + S + R\ ,$$

où l'on a noté :

$$I = \int_K^U f(t)dt, \quad S = \sum_{j=1}^{J} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(U) - f^{(2j-1)}(K)\right)$$

$$\text{et} \quad R = -\frac{1}{(2J)!}\int_K^U \tilde{B}_{2J}(t) f^{(2J)}(t)dt.$$

Code de la fonction ζ

```
def S(s,J,K) :
    fact , prod = 2 , s
    result = B[2]*prod/(fact*(K**(s+1)))
    for j in [2,3..J] :
        fact = fact*(2*j-1)*(2*j)
        prod = prod*(s+2*j-3)*(s+2*j-2)
        result += B[2*j]*prod/(fact*(K**(s+2*j-1)))
    return result

def f(s,J,K) :
    result = sum (1/(k**s) for k in [1,2..(K-1)])
    result = result + 1/(2*(K**s))+1/((s-1)*(K**(s-1)))
    return result + S(s,J,K)
```

Code de la fonction ζ

```
def monzeta (s) :
    """
    INPUT:
    - 's' un ComplexBall ne contenant pas 1,
    de partie réelle > -1, de précision >= 10
    OUTPUT:
    - un ComplexBall avec à peu près la même
    précision que celle de s, contenant l'image
    de la boule s par la fonction zeta """
    prec = s.parent().precision()
    J = max(ZZ((s/2).above_abs().ceil()),prec//2)
    result = f(s,J,2*J)
    return result.add_error(4**-J)
```

Code de la fonction ζ

```
def monzeta (s) :
    prec = s.parent().precision()
    J = max(ZZ((s/2).above_abs().ceil()),prec//2)
    result = f(s,J,2*J)
    return result.add_error(4**-J)

C = ComplexBallField(30)
s = 0.5+8*I
print monzeta(C(s))
print C(s).zeta()
```

```
[1.241615 +/- 4.20e-7] + [0.360048 +/- 7.04e-7]*I
[1.24161511 +/- 4.51e-9] + [0.360047588 +/- 4.63e-10]*I
```

Quatrième Partie

Résultats

Minoration du nombre de zéros sur la droite

Je note : $\rho : t \in \mathbb{R} \mapsto \chi\left(\frac{1}{2} + it\right)$.

```
C = ComplexBallField()
def rho (t) :
    s = 1/2+t*I
    result = gamma(s/2)*(pi**(-s/2))*monzeta(C(s))
    return C(result).real()
rho(14), rho(15), rho(20) , rho(22), rho(24), rho(26)
```

```
([-2.05140834889e-6 +/- 7.74e-18],
 [6.26590862439e-6 +/- 5.84e-18],
 [1.83162621142e-7 +/- 7.02e-20],
 [-3.18691370150e-8 +/- 1.56e-20],
 [-7.34657155196e-9 +/- 5.35e-21],
 [1.91461303027e-9 +/- 9.29e-22])
```

Fin de la présentation orale

(les slides suivants sont prévus pour répondre à d'éventuelles questions.)

Comment coder ζ' à partir de ζ ?

- L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne, pour $s \in \mathbb{C}$ et $h > 0$ tels que $1 \notin [s, s+h]$:

$$\left| \frac{\zeta(s+h) - \zeta(s)}{h} - \zeta'(s) \right| \leq \frac{h}{2} \sup_{[s,s+h]} |\zeta''| \, .$$

- L'inégalité de Cauchy à l'ordre 2 donne, pour tout $r > 0$, et tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $|s-1| > r$:

$$\zeta''(s) \leq \frac{2}{r^2} \sup_{\mathscr{B}(s,r)} |\zeta| \, .$$

Comment coder ζ' à partir de ζ ?

Soient $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > -\frac{1}{4}$, et $|s-1| \geq \frac{1}{4}$, et $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$11 + \frac{1}{2}(1+|s|)^2 \leq 2^k.$$

Alors, pour tout $p \geq 8$, on a :

$$\left| \frac{\zeta(s+2^{-p}) - \zeta(s)}{2^{-p}} - \zeta'(s) \right| \leq 2^{8+k-p}.$$

Code de la fonction ζ'

```
def zetaprime (s) :
    """
    INPUT:
    - 's' un ComplexBall de partie réelle > -1/4, de distance
    à 1 supérieure à 1/4 et de précision >= 10
    OUTPUT:
    - un ComplexBall avec à peu près la moitié de la précision
    de celle de s, contenant l'image de la boule s par zeta' """
    prec = s.parent().precision()
    k = ZZ(log(11+(1/2)*(1+s.above_abs())^2,2).above_abs().ceil())
    p = 8+k+prec//2
    result = (2**p) * (monzeta(s+2**-p)-monzeta(s))
    return result.add_error(2**(8+k-p))

print zetaprime(ComplexBallField(100)(0.5+8*I))
```

```
[-0.0968099 +/- 7.83e-8] + [-0.2252766 +/- 4.50e-8]*I
```

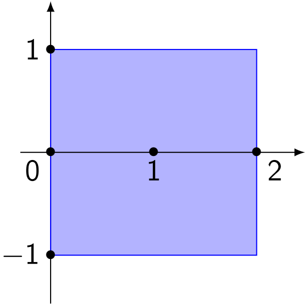
Explication

```
C = ComplexBallField()
a , b = C(1) , C(1/3)
print a.accuracy() , b.accuracy()
print a.parent().precision()
```

```
9223372036854775807 51
53
```

Deux problèmes

1) Comment se débarrasser du pôle en 1 ?



2) Comment éviter que le contour passe sur un zéro de ζ ?

Si le contour passe sur un zéro, le calcul approché de l'intégrale de contour ne pourra aboutir. Donc si le calcul aboutit, c'est que le contour ne passe pas sur un zéro de ζ.

Historique

- Riemann lui même vers 1859 : 3
- E. C. Titchmarsh et L. J. Comrie en 1936 : 1041

- D. H. Lehmer en 1956 : 15 000
- R. P. Brent en 1979 : 81 000 001
- J. van de Lune en 2001 : 10 000 000 000
- X. Gourdon en 2004 : 10 000 000 000 000

RealBallField

```
R = RealBallField(10)
a = R(0)
a = a.add_error(0.1) ; print a
print a^2 , a^2 >= 0
```

```
[+/- 0.101]
[+/- 0.0101] False
```

Coder la fonction Γ d'Euler ?

Approximation de Lanczos :

$$\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi}\left(s+g+\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\left(s+g+\frac{1}{2}\right)\right)A_g(s)$$

$$\text{où}\quad A_g(s) = \frac{1}{2}p_0(g) + p_1(g)\frac{s}{s+1} + p_2(g)\frac{s(s-1)}{(s+1)(s+2)} + \dots$$