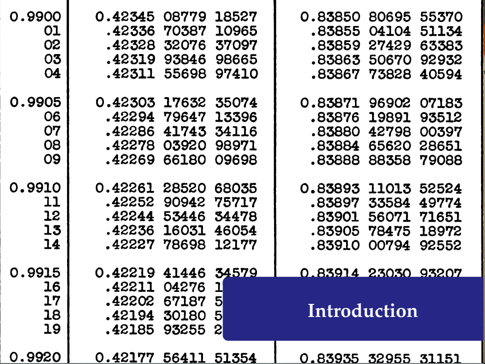
Autour de l'évaluation numérique des fonctions D-finies

Marc Mezzarobba

Arénaire

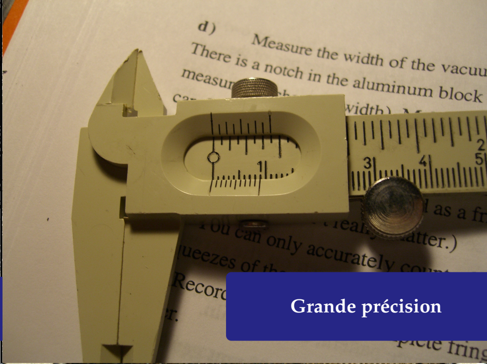
ENS DE LYON

Groupe de travail Arénaire
24 novembre 2011



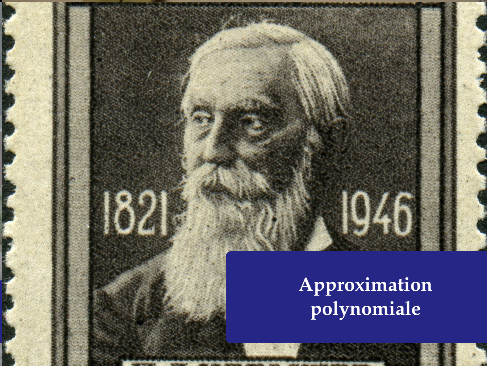
0.9900	0.42345 08779 18527	0.83850 80695 55370
01	.42336 70387 10965	.83855 04104 51134
02	.42328 32076 37097	.83859 27429 63383
03	.42319 93846 98665	.83863 50670 92932
04	.42311 55698 97410	.83867 73828 40594
0.9905	0.42303 17632 35074	0.83871 96902 07183
06	.42294 79647 13396	.83876 19891 93512
07	.42286 41743 34116	.83880 42798 00397
08	.42278 03920 98971	.83884 65620 28651
09	.42269 66180 09698	.83888 88358 79088
0.9910	0.42261 28520 68035	0.83893 11013 52524
11	.42252 90942 75717	.83897 33584 49774
12	.42244 53446 34478	.83901 56071 71651
13	.42236 16031 46054	.83905 78475 18972
14	.42227 78698 12177	.83910 00794 92552
0.9915	0.42219 41446 34579	0.83914 23030 93207
16	.42211 04276 1	
17	.42202 67187 5	
18	.42194 30180 5	
19	.42185 93255 2	
0.9920	0.42177 56411 51354	0.83935 32955 31151

Introduction



Grande précision

Bornes

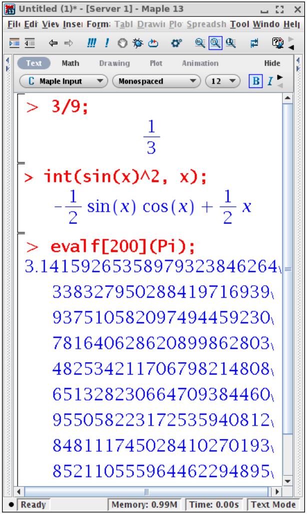


Approximation polynomiale

0.9900	0.42345 08779 18527	0.83850 80695 55370
01	.42336 70387 10965	.83855 04104 51134
02	.42328 32076 37097	.83859 27429 63383
03	.42319 93846 98665	.83863 50670 92932
04	.42311 55698 97410	.83867 73828 40594
0.9905	0.42303 17632 35074	0.83871 96902 07183
06	.42294 79647 13396	.83876 19891 93512
07	.42286 41743 34116	.83880 42798 00397
08	.42278 03920 98971	.83884 65620 28651
09	.42269 66180 09698	.83888 88358 79088
0.9910	0.42261 28520 68035	0.83893 11013 52524
11	.42252 90942 75717	.83897 33584 49774
12	.42244 53446 34478	.83901 56071 71651
13	.42236 16031 46054	.83905 78475 18972
14	.42227 78698 12177	.83910 00794 92552
0.9915	0.42219 41446 34579	0.83914 23030 93207
16	.42211 04276 1[illegible]	[illegible]
17	.42202 67187 5[illegible]	[illegible]
18	.42194 30180 5[illegible]	[illegible]
19	.42185 93255 2[illegible]	[illegible]
0.9920	0.42177 56411 51354	0.83935 32955 31151

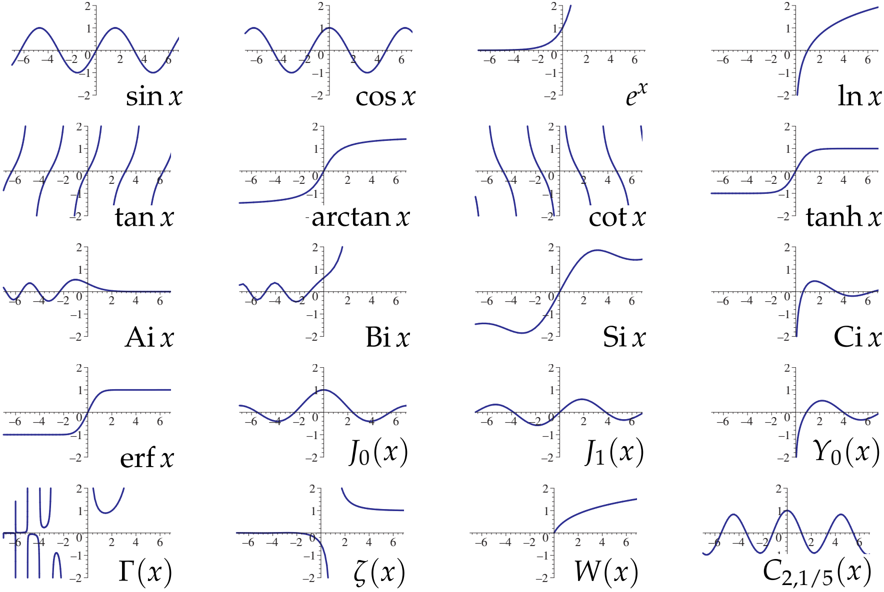
Introduction

Calcul formel ?



- calcul exact + précision arbitraire (outils plutôt « symboliques »)
- complexité
- objets : fonctions spéciales

Fonctions élémentaires, fonctions spéciales



Fonctions D-finies

Une fonction $y(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est D-finie (holonome) si elle est solution d'une équation différentielle linéaire (homogène) à coefficients polynomiaux :

$$a_r(z)\, y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z)\, y'(z) + a_0(z)\, y(z) = 0, \quad a_j \in \mathbb{K}[z].$$

- La suite des coefficients du développement de Taylor d'une fonction D-finie satisfait une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux.

Exemple : $y(z) = \sin z$

$$y''(z) + y(z) = 0 \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Fonctions D-finies

Une fonction $y(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est D-finie (holonome) si elle est solution d'une équation différentielle linéaire (homogène) à coefficients polynomiaux :

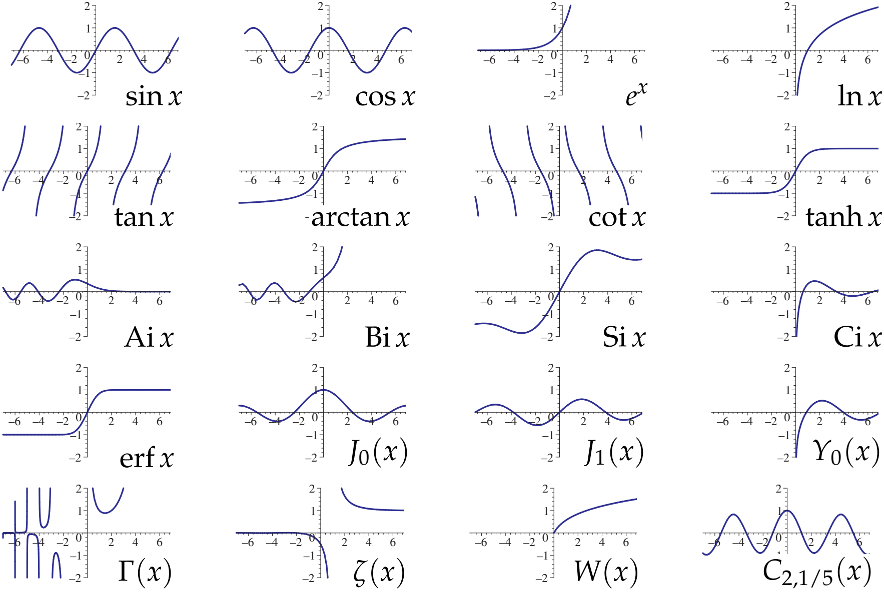
$$a_r(z)\, y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z)\, y'(z) + a_0(z)\, y(z) = 0, \quad a_j \in \mathbb{K}[z].$$

- La suite des coefficients du développement de Taylor d'une fonction D-finie satisfait une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux.

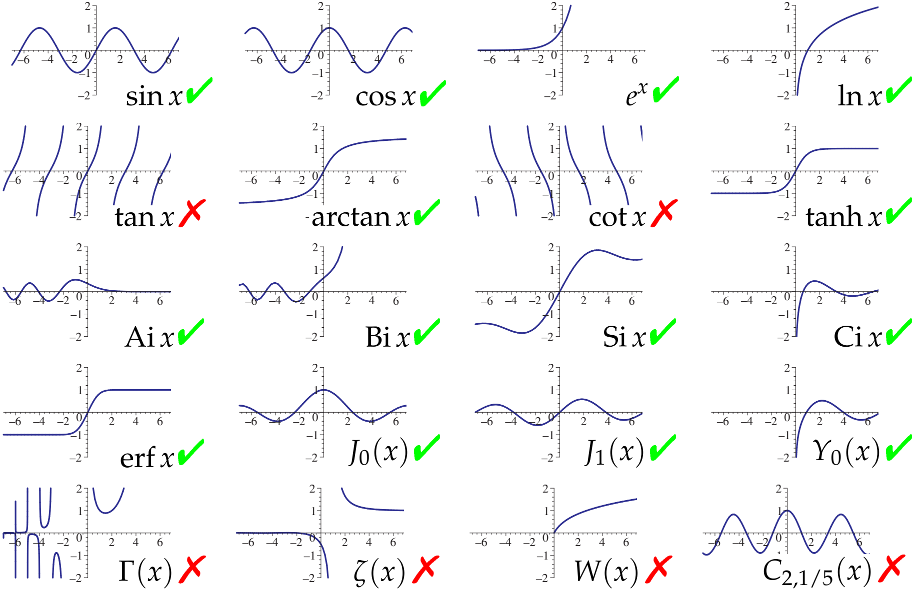
Exemple : $y(z) = K_0(z)$ (fonction de Bessel modifiée)

$$z\, y''(z) + y'(z) - z\, y(z) = 0$$

Fonctions élémentaires, fonctions spéciales

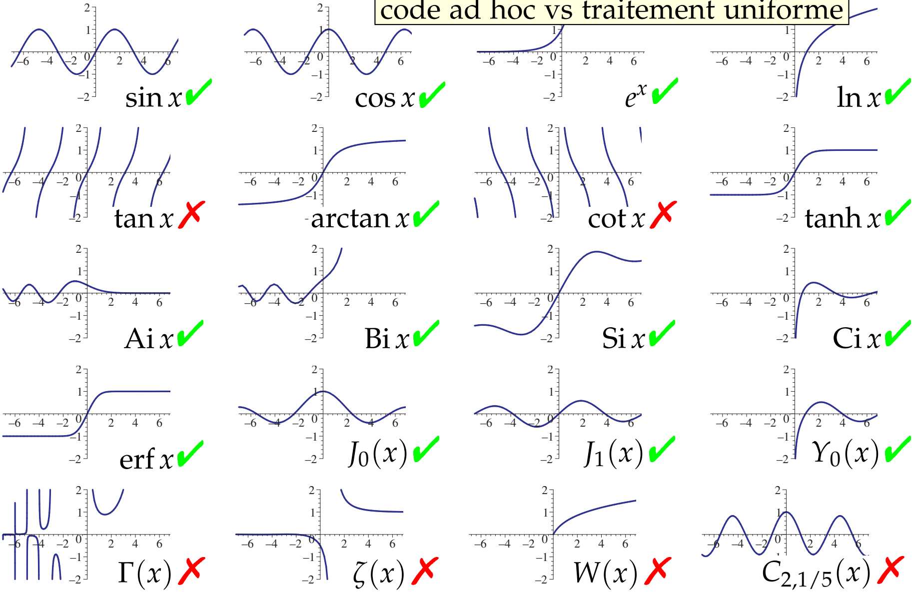


Fonctions élémentaires, fonctions spéciales

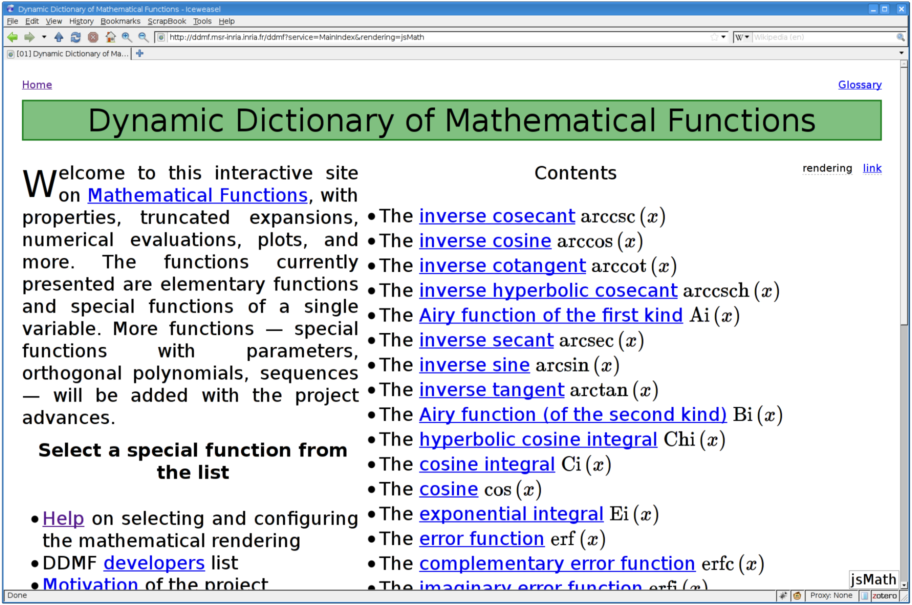


Fonctions élémentaires, fonctions spéciales

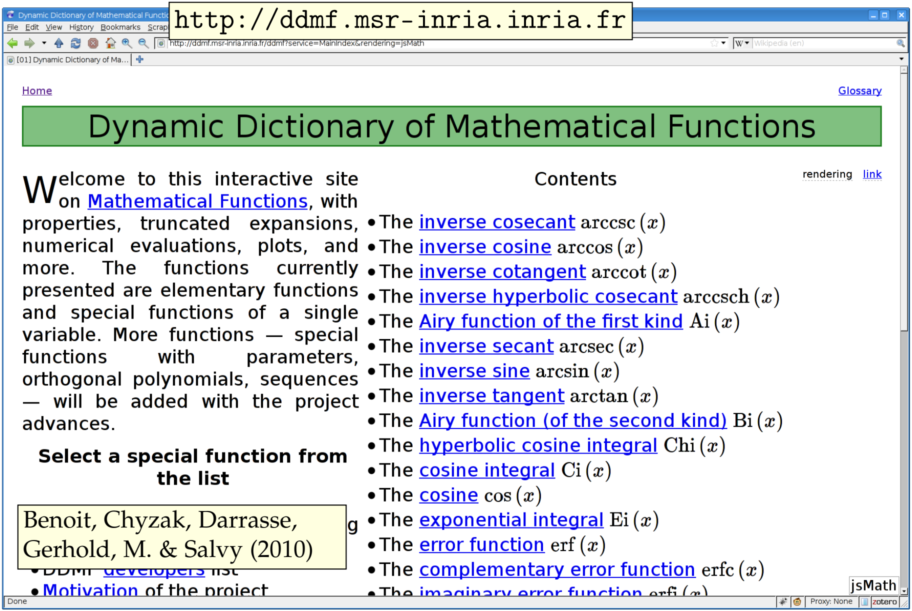
code ad hoc vs traitement uniforme



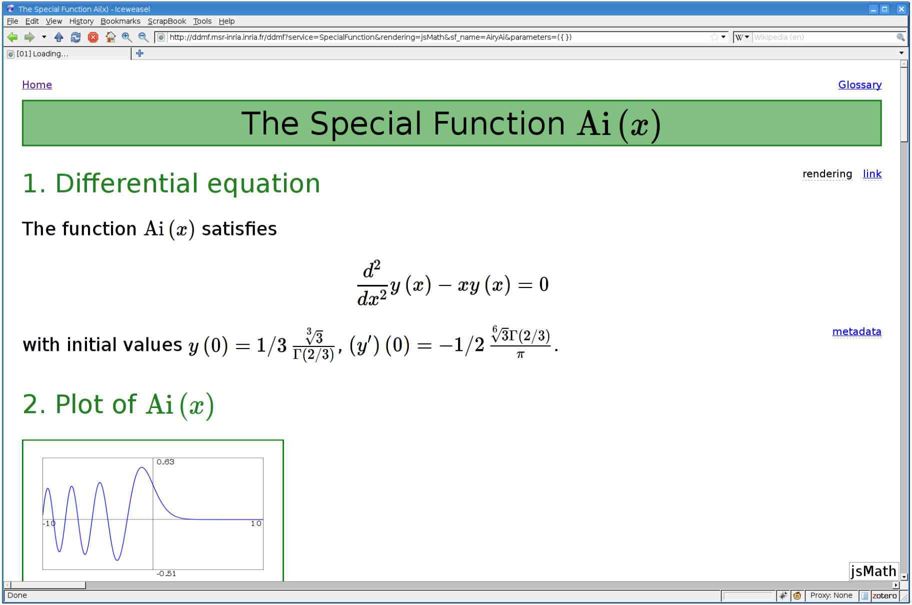
Un dictionnaire des fonctions D-finies



Un dictionnaire des fonctions D-finies



Un dictionnaire des fonctions D-finies



The Special Function Ai(x) - Iceweasel

File Edit View History Bookmarks ScrapBook Tools Help

http://ddmf.msr-inria.inria.fr/ddmf?service=SpecialFunction&rendering=jsMath&sf_name=AiryAi&parameters=({ })

[01] Loading...

Home Glossary

The Special Function $\mathrm{Ai}(x)$

1. Differential equation

rendering link

The function $\mathrm{Ai}(x)$ satisfies

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) - x y(x) = 0$$

with initial values $y(0) = 1/3 \, \frac{\sqrt[3]{3}}{\Gamma(2/3)}$, $(y')(0) = -1/2 \, \frac{\sqrt[6]{3}\Gamma(2/3)}{\pi}$.

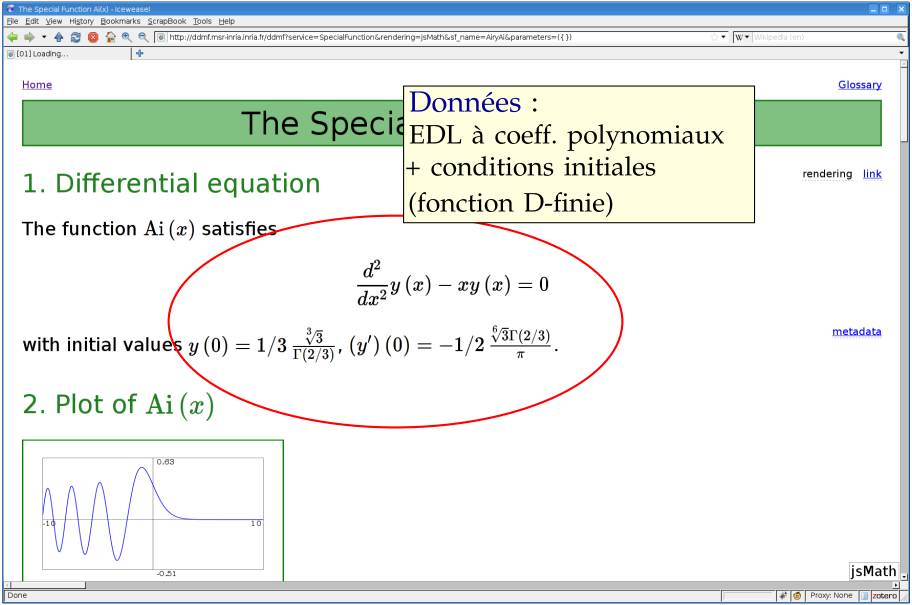
metadata

2. Plot of $\mathrm{Ai}(x)$

jsMath

Done Proxy: None zotero

Un dictionnaire des fonctions D-finies



Données :
EDL à coeff. polynomiaux
+ conditions initiales
(fonction D-finie)

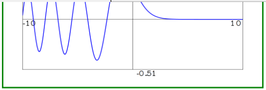
Un dictionnaire des fonctions D-finies

The Special Function Ai(x) - Iceweasel

File Edit View History Bookmarks ScrapBook Tools Help

http://ddmf.msr-inria.inria.fr/ddmf?service=SpecialFunction&rendering=jsMath&sf_name=AiryAi&parameters=({ })

[01] Loading...



min = -10 max = 10 Submit Query

3. Numerical Evaluation

$$\mathrm{Ai}\,(1/4+1/4\,i)\approx 0.28881085-0.06285935\,i.$$

metadata

(Below, path may be either a point z or a broken-line path $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ along which to perform analytic continuation of the solution of the defining differential equation. Each z_k should be of the form x + y*i.)

path = 1/4+1/4*i precision = 8 Submit Query

4. Taylor expansion of $\mathrm{Ai}\,(x)$ at 0

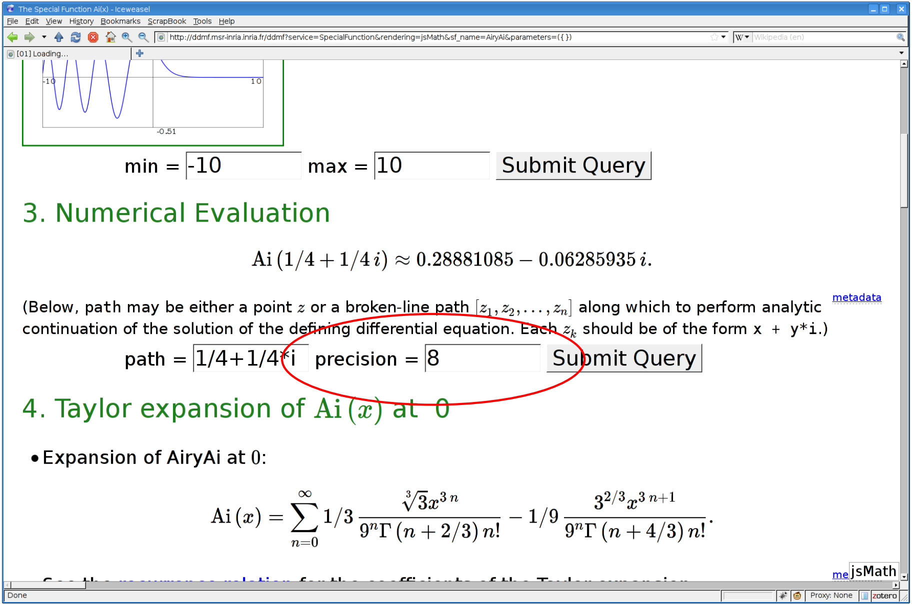
- Expansion of AiryAi at 0:

$$\mathrm{Ai}\,(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 1/3\,\frac{\sqrt[3]{3}x^{3\,n}}{9^n\Gamma\,(n+2/3)\,n!}-1/9\,\frac{3^{2/3}x^{3\,n+1}}{9^n\Gamma\,(n+4/3)\,n!}.$$

me jsMath

Done Proxy: None zotero

Un dictionnaire des fonctions D-finies



The Special Function Ai(x) - Iceweasel

File Edit View History Bookmarks ScrapBook Tools Help

http://ddmf.msr-inria.inria.fr/ddmf?service=SpecialFunction&rendering=jsMath&sf_name=AiryAi&parameters=({ })

[01] Loading...

-10 10 -0.51

min = -10 max = 10 Submit Query

3. Numerical Evaluation

$$\mathrm{Ai}\,(1/4+1/4\,i)\approx 0.28881085-0.06285935\,i.$$

(Below, path may be either a point z or a broken-line path $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ along which to perform analytic continuation of the solution of the defining differential equation. Each z_k should be of the form `x + y*i`.) metadata

path = 1/4+1/4*i precision = 8 Submit Query

4. Taylor expansion of $\mathrm{Ai}\,(x)$ at 0

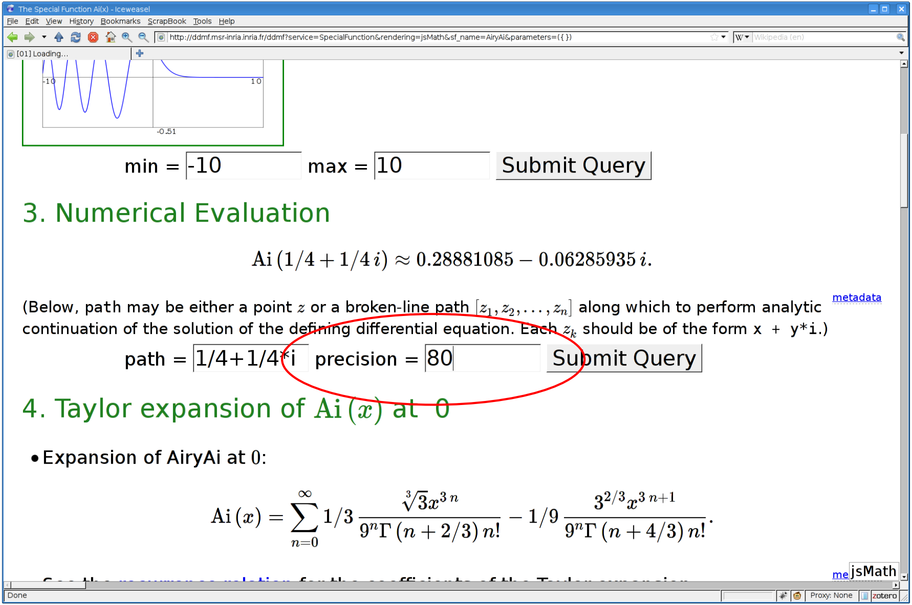
- Expansion of AiryAi at 0:

$$\mathrm{Ai}\,(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 1/3\,\frac{\sqrt[3]{3}x^{3\,n}}{9^n\Gamma\,(n+2/3)\,n!}-1/9\,\frac{3^{2/3}x^{3\,n+1}}{9^n\Gamma\,(n+4/3)\,n!}.$$

me jsMath

Done Proxy: None zotero

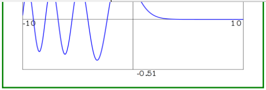
Un dictionnaire des fonctions D-finies



Un dictionnaire des fonctions D-finies

The Special Function Ai(x) - Iceweasel

http://ddmf.msr-inria.inria.fr/ddmf?service=SpecialFunction&rendering=jsMath&sf_name=AiryAi&parameters=({ })



min = -10 max = 10 Submit Query

3. Numerical Evaluation

$$\mathrm{Ai}\,(1/4+1/4\,i) \approx 0.2888108538482087217325648367140704681126252480580043686174937839264 7$$

(Below, path may be either a point z or a broken-line path $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ along which to perform analytic continuation of the solution of the defining differential equation. Each z_k should be of the form x + y*i.) metadata

path = 1/4+1/4*i precision = 80 Submit Query

4. Taylor expansion of $\mathrm{Ai}\,(x)$ at 0

- Expansion of AiryAi at 0:

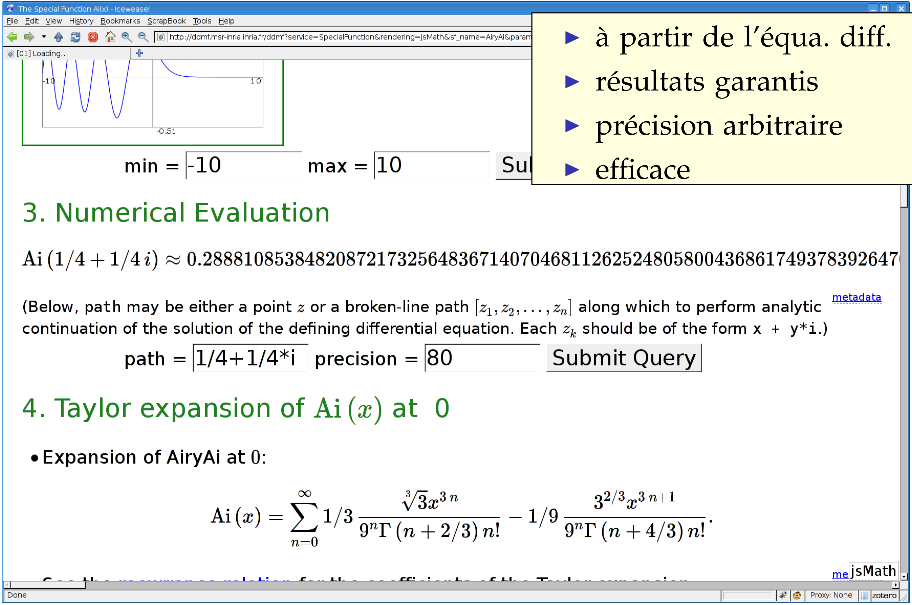
$$\mathrm{Ai}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/3\,\frac{\sqrt[3]{3}x^{3\,n}}{9^n\Gamma\,(n+2/3)\,n!} - 1/9\,\frac{3^{2/3}x^{3\,n+1}}{9^n\Gamma\,(n+4/3)\,n!}.$$

jsMath

Done

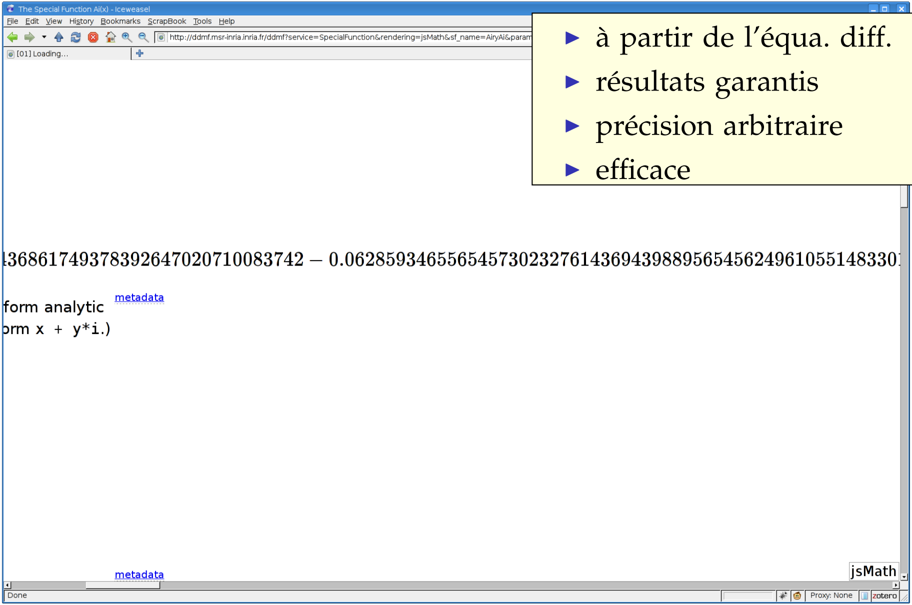
Un dictionnaire des fonctions D-finies

- à partir de l'équa. diff.
- résultats garantis
- précision arbitraire
- efficace



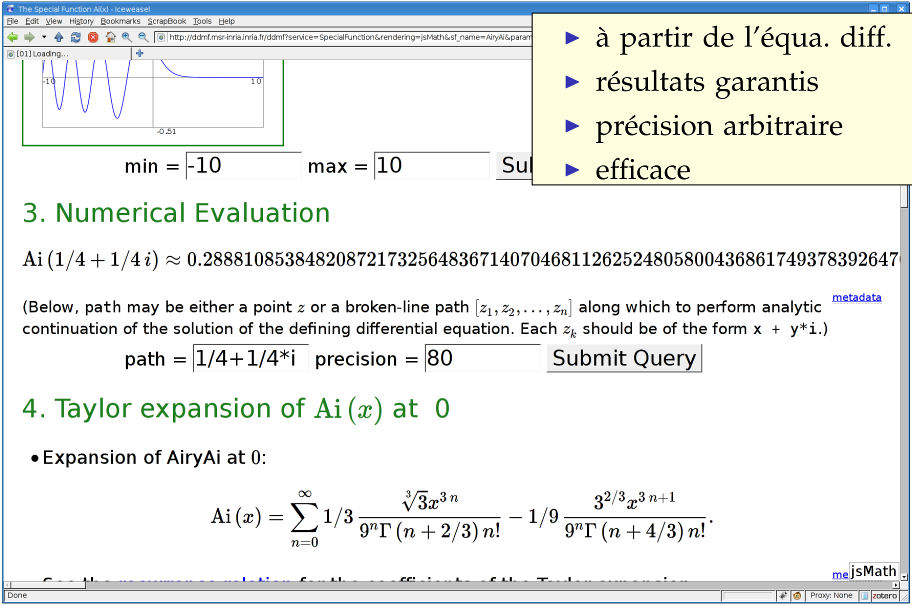
Un dictionnaire des fonctions D-finies

- à partir de l'équa. diff.
- résultats garantis
- précision arbitraire
- efficace

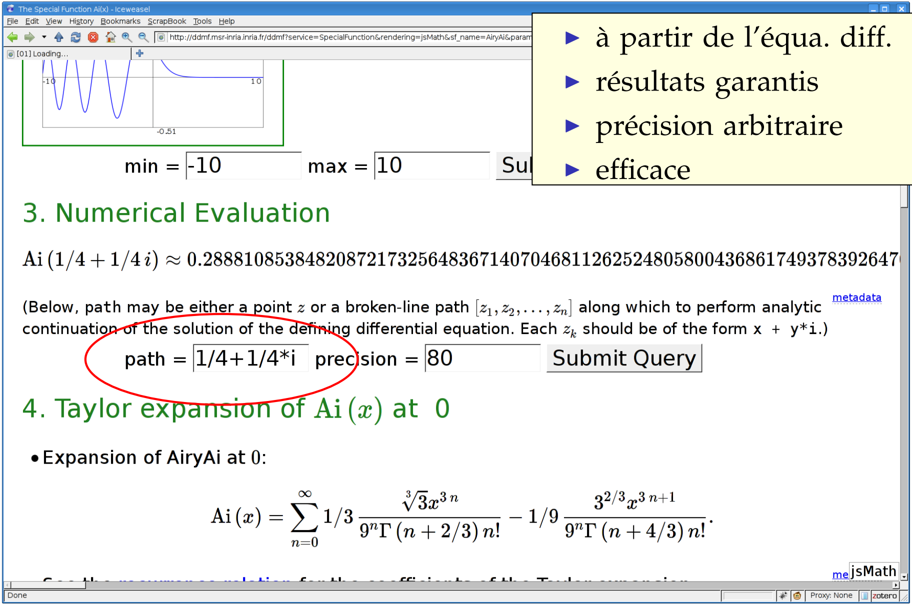


Un dictionnaire des fonctions D-finies

- à partir de l'équa. diff.
- résultats garantis
- précision arbitraire
- efficace



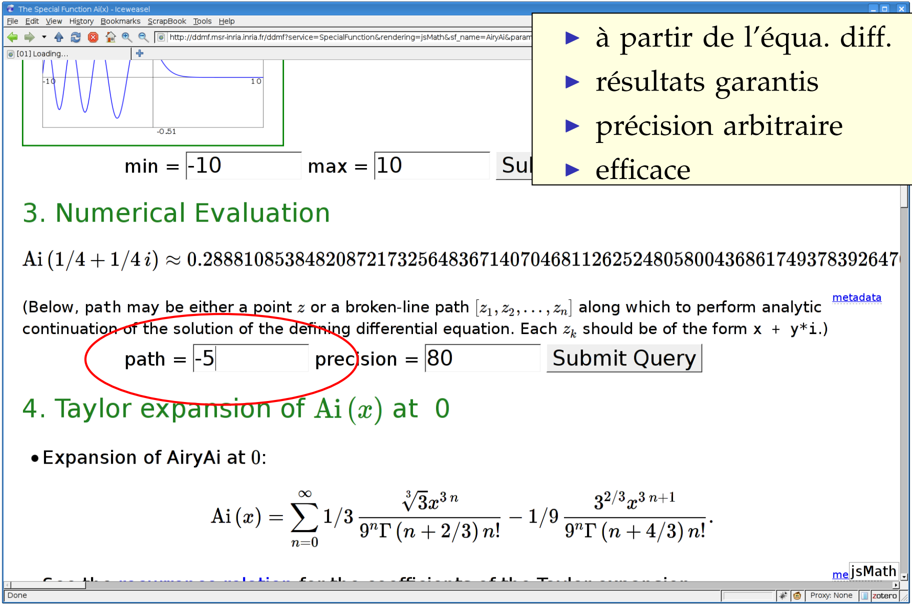
Un dictionnaire des fonctions D-finies



- à partir de l'équa. diff.
- résultats garantis
- précision arbitraire
- efficace

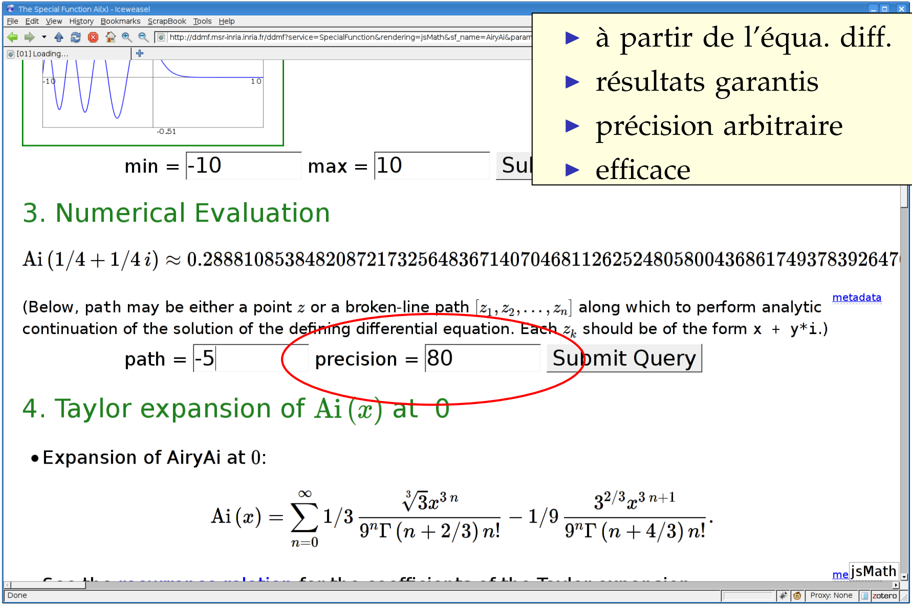
Un dictionnaire des fonctions D-finies

- à partir de l'équa. diff.
- résultats garantis
- précision arbitraire
- efficace



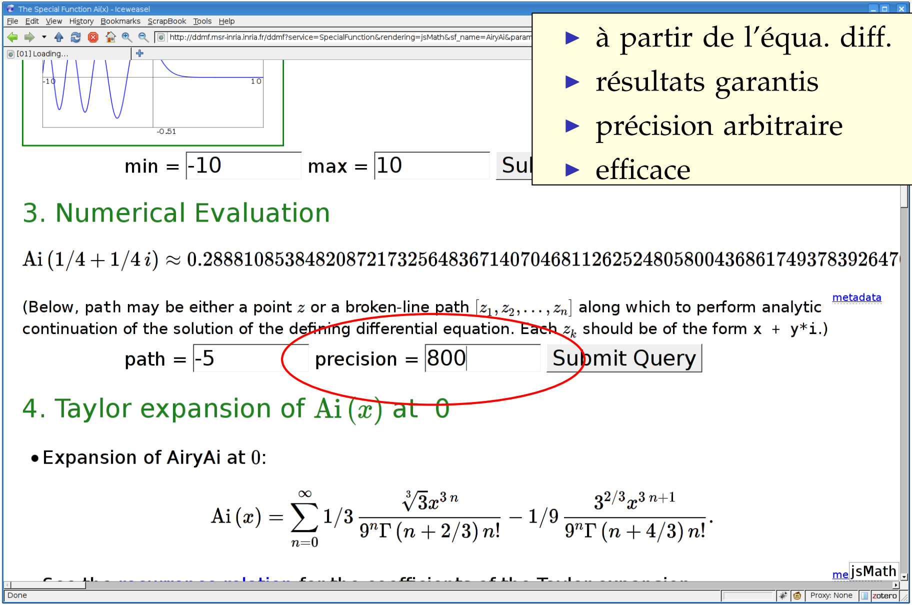
Un dictionnaire des fonctions D-finies

- à partir de l'équa. diff.
- résultats garantis
- précision arbitraire
- efficace

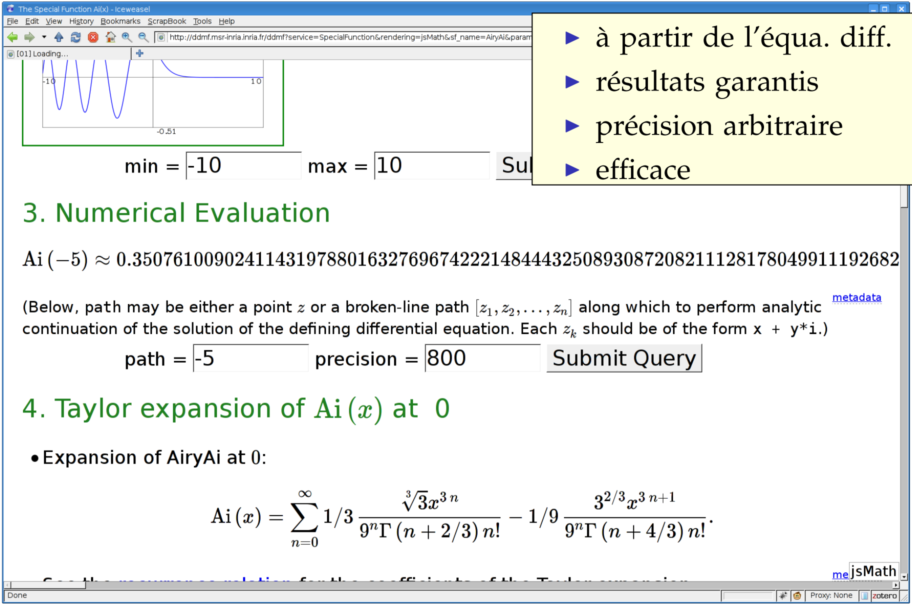


Un dictionnaire des fonctions D-finies

- à partir de l'équa. diff.
- résultats garantis
- précision arbitraire
- efficace



Un dictionnaire des fonctions D-finies



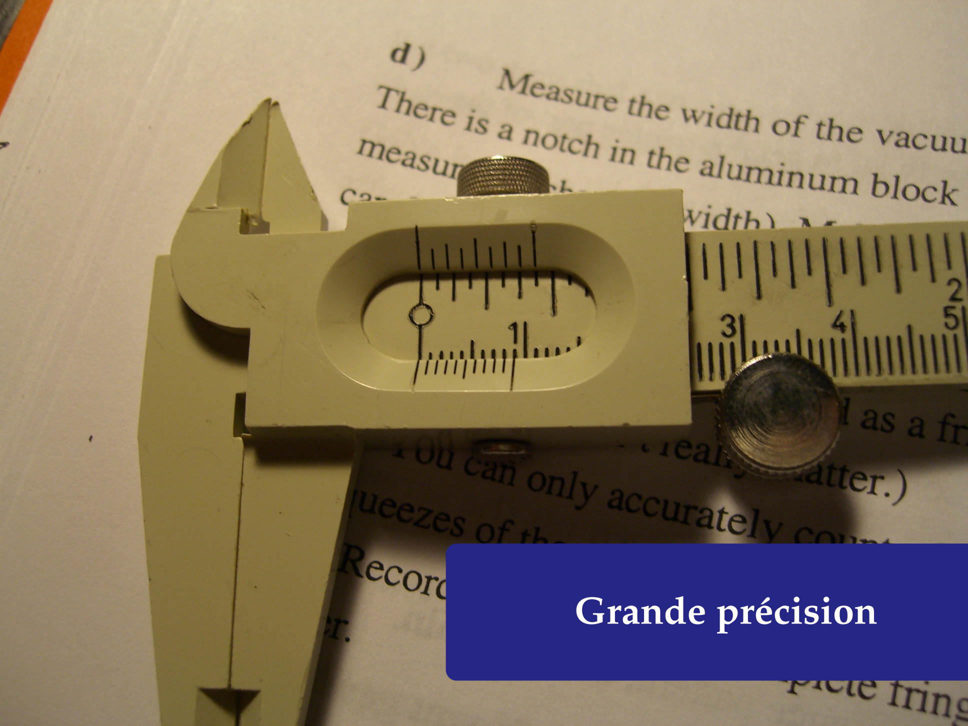
- à partir de l'équa. diff.
- résultats garantis
- précision arbitraire
- efficace

NumGfun

http://algo.inria.fr/libraries/ (LGPL)

B. Salvy and P. Zimmermann. Gfun : a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. ACM TOMS, 1994.

M. Mezzarobba. NumGfun : a Package for Numerical and Analytic Computation with D-finite functions. ISSAC 2010.



Grande précision

Fonctions de Heun doublement confluentes

```
> diffeq := {diff(diff(y(z),z),z)+(2*z^3-
  z^2*a-2*z-a)/((z+1)^2*(z-1)^2)*diff(y(z)
  ,z)+(z^2*b+z*c+2*z*a+d)*y(z)/((z-1)^3*
  (z+1)^3),y(0)=1,(D(y))(0)=0};
```

Fonctions de Heun doublement confluentes

```
> diffeq := {diff(diff(y(z),z),z)+(2*z^3-
  z^2*a-2*z-a)/((z+1)^2*(z-1)^2)*diff(y(z)
  ,z)+(z^2*b+z*c+2*z*a+d)*y(z)/((z-1)^3*
  (z+1)^3),y(0)=1,(D(y))(0)=0};
```

$$diffeq := \left\{ \frac{d^2}{dz^2}\, y(z) + \frac{(2\, z^3 - z^2\, a - 2\, z - a) \left(\frac{d}{dz}\, y(z) \right)}{(z+1)^2\, (z-1)^2} + \frac{(z^2\, b + z\, c + 2\, z\, a + d)\, y(z)}{(z-1)^3\, (z+1)^3},\, y(0) = 1,\, D(y)(0) = 0 \right\}$$

```
>
```

Fonctions de Heun doublement confluentes

```
> diffeq := {diff(diff(y(z),z),z)+(2*z^3-
  z^2*a-2*z-a)/((z+1)^2*(z-1)^2)*diff(y(z)
  ,z)+(z^2*b+z*c+2*z*a+d)*y(z)/((z-1)^3*
  (z+1)^3),y(0)=1,(D(y))(0)=0};
```

$$diffeq := \left\{ \frac{d^2}{dz^2}\, y(z) + \frac{(2\,z^3 - z^2\,a - 2\,z - a)\left(\frac{d}{dz}\, y(z)\right)}{(z+1)^2\,(z-1)^2} + \frac{(z^2\,b + z\,c + 2\,z\,a + d)\; y(z)}{(z-1)^3\,(z+1)^3},\; y(0) = 1,\; \mathrm{D}(y)(0) = 0 \right\}$$

```
> a, b, c, d := 1, 1/3, 1/2, 3;
```

Fonctions de Heun doublement confluentes

```
> diffeq := {diff(diff(y(z),z),z)+(2*z^3-z^2*a-2*z-a)/((z+1)^2*(z-1)^2)*diff(y(z),z)+(z^2*b+z*c+2*z*a+d)*y(z)/((z-1)^3*(z+1)^3),y(0)=1,(D(y))(0)=0};
```

$$diffeq := \left\{ \frac{d^2}{dz^2}\, y(z) + \frac{(2\,z^3 - z^2\,a - 2\,z - a)\left(\frac{d}{dz}\, y(z)\right)}{(z+1)^2\,(z-1)^2} + \frac{(z^2\,b + z\,c + 2\,z\,a + d)\,y(z)}{(z-1)^3\,(z+1)^3},\ y(0) = 1,\ D(y)(0) = 0 \right\}$$

```
> a, b, c, d := 1, 1/3, 1/2, 3;
```

$$a, b, c, d := 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 3$$

```
>
```

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
```

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052069
>
```

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
```

1.23715744756395253918007831405821000395447403052069

```
> myHeunD := diffeqtoproc(diffeq, y(z)):
```

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052069
> myHeunD := diffeqtoproc(diffeq, y(z)):
>
```

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
1.23715744756395253918007831405821000395447403052069
> myHeunD := diffeqtoproc(diffeq, y(z)):
> myHeunD(1/3, 50);
```

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052069
> myHeunD := diffeqtoproc(diffeq, y(z)):
> myHeunD(1/3, 50);
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052075
>
```

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052069
> myHeunD := diffeqtoproc(diffeq, y(z)):
> myHeunD(1/3, 50);
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052075
>
```

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
                1.23715744756395253918007831405821000395447403052069
> myHeunD := diffeqtoproc(diffeq, y(z)):
> myHeunD(1/3, 50);
                1.23715744756395253918007831405821000395447403052075
> myHeunD(1/3, 2000);
```

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052069
> myHeunD := diffeqtoproc(diffeq, y(z)):
> myHeunD(1/3, 50);
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052075
> myHeunD(1/3, 2000);
```

(1.3 s plus tard…)

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052069
> myHeunD := diffeqtoproc(diffeq, y(z)):
> myHeunD(1/3, 50);
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052075
> myHeunD(1/3, 2000);
1.23715744756395253918007831405821000395447403052074 7249\
    77368122339910479272634279104260366917046868224326693\
    22058740005957868869065637255063771378117634825003548\
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
    [illegible]
    96170152380808246265230916158732964496323766777357428\
    28214335810166903875586333320334746574757060060591160\
    33361999970684428816250827723506800809
>
```

Questions de précision

```
> evalf[51](HeunD(a, b, c, d, 1/3));
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052069
> myHeunD := diffeqtoproc(diffeq, y(z)):
> myHeunD(1/3, 50);
  1.23715744756395253918007831405821000395447403052075
> myHeunD(1/3, 2000);
1.237157447563952539180078314058210003954474030520747249\
    77368122339910479272634279104260366917046868224326693\
    22058740005957868869065637255063771378117634825003548\
    . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
    96170152380808246265230916158732964496323766777357428\
    28214335810166903875586333320334746574757060060591160\
    3336199997068442881625082772350680080 9
>
```

code plus général = moins de bugs !

Évaluation au voisinage d’une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
                                   2.695836763
>
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
```

2.695836763

```
> myHeunD(-0.9, 9);
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
                                2.695836763
> myHeunD(-0.9, 9);
                                2.695836219
>
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
```

2.695836763

```
> myHeunD(-0.9, 9);
```

2.695836219

```
>
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
```

2.695836763

```
> myHeunD(-0.9, 9);
```

2.695836219

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.99));
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
```

2.695836763

```
> myHeunD(-0.9, 9);
```

2.695836219

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.99));
Warning, breaking after 2000 terms, the series
is not converging
```

undefined

```
>
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
                        2.695836763
> myHeunD(-0.9, 9);
                        2.695836219
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.99));
Warning, breaking after 2000 terms, the series
is not converging
                         undefined
> myHeunD(-0.99);
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
```

2.695836763

```
> myHeunD(-0.9, 9);
```

2.695836219

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.99));
Warning, breaking after 2000 terms, the series
is not converging
```

undefined

```
> myHeunD(-0.99);
```

4.6775585280

```
>
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
                    2.695836763
> myHeunD(-0.9, 9);
                    2.695836219
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.99));
Warning, breaking after 2000 terms, the series
is not converging
                    undefined
> myHeunD(-0.99);
                    4.6775585280
> myHeunD(-0.99, 500);
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
                        2.695836763
> myHeunD(-0.9, 9);
                        2.695836219
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.99));
Warning, breaking after 2000 terms, the series
is not converging
                         undefined
> myHeunD(-0.99);
                        4.6775585280
> myHeunD(-0.99, 500);
```

(6.1 s plus tard…)

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
                    2.695836763
> myHeunD(-0.9, 9);
                    2.695836219
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.99));
Warning, breaking after 2000 terms, the series
is not converging
                    undefined
> myHeunD(-0.99);
                    4.6775585280
> myHeunD(-0.99, 500);
4.6775585279668904816463716164141305656503235604099220 37\
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
   89542201276207762696563032189351846152496641167932588\
   466046002397287307888 1
>
```

Évaluation au voisinage d'une singularité

```
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.9));
                                2.695836763
> myHeunD(-0.9, 9);
                                2.695836219
> evalf(HeunD(a, b, c, d, -0.99));
Warning, breaking after 2000 terms, the series
is not converging
                                 undefined
> myHeunD(-0.99);
                                4.6775585280
> myHeunD(-0.99, 500);
4.67755852796689048164637161641413056565032356040992203 7\
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
    89542201276207762696563[illegible]588\
    4660460023972873078881
>
```

pas d'instabilité numérique
(on paie en temps de calcul)

Un exemple aléatoire

```
> diffeq := random_diffeq(3, 2);
```

Un exemple aléatoire

```
> diffeq := random_diffeq(3, 2);
```

$$diffeq := \left\{ \left(\frac{13}{30} + \frac{8}{15} z + \frac{7}{30} z^2 \right) y(z) + \left(-\frac{9}{20} + \frac{29}{30} z - \frac{1}{12} z^2 \right) \left(\frac{d}{dz} y(z) \right) + \left(-\frac{43}{60} + \frac{49}{60} z + \frac{11}{30} z^2 \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} y(z) \right) + \left(-\frac{7}{12} + \frac{17}{30} z - \frac{3}{5} z^2 \right) \left(\frac{d^3}{dz^3} y(z) \right), y(0) = 0, D(y)(0) = \frac{7}{30}, D^{(2)}(y)(0) = -\frac{43}{60} \right\}$$

Un exemple aléatoire

```
> diffeq := random_diffeq(3, 2);
```

$$diffeq := \left\{ \left(\frac{13}{30} + \frac{8}{15} z + \frac{7}{30} z^2\right) y(z) + \left(-\frac{9}{20} + \frac{29}{30} z - \frac{1}{12} z^2\right) \left(\frac{d}{dz} y(z)\right) + \left(-\frac{43}{60} + \frac{49}{60} z + \frac{11}{30} z^2\right) \left(\frac{d^2}{dz^2} y(z)\right) + \left(-\frac{7}{12} + \frac{17}{30} z - \frac{3}{5} z^2\right) \left(\frac{d^3}{dz^3} y(z)\right), y(0) = 0, D(y)(0) = \frac{7}{30}, D^{(2)}(y)(0) = -\frac{43}{60} \right\}$$

```
> evaldiffeq(diffeq, y(z), (1+I)/5, 40);
```

Un exemple aléatoire

```
> diffeq := random_diffeq(3, 2);
```

$$diffeq := \left\{ \left(\frac{13}{30} + \frac{8}{15} z + \frac{7}{30} z^2 \right) y(z) + \left(-\frac{9}{20} + \frac{29}{30} z - \frac{1}{12} z^2 \right) \left(\frac{d}{dz} y(z) \right) + \left(-\frac{43}{60} + \frac{49}{60} z + \frac{11}{30} z^2 \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} y(z) \right) + \left(-\frac{7}{12} + \frac{17}{30} z - \frac{3}{5} z^2 \right) \left(\frac{d^3}{dz^3} y(z) \right), y(0) = 0, D(y)(0) = \frac{7}{30}, D^{(2)}(y)(0) = -\frac{43}{60} \right\}$$

```
> evaldiffeq(diffeq, y(z), (1+I)/5, 40);
```

$$0.04485557487767843131893308147593115486 63 + 0.01990489830212805305047897725810997882 82\ I$$

Grande précision

```
> evaldiffeq(diffeq, y(z), 1/5, 1000000);
```

Grande précision

```
> evaldiffeq(diffeq, y(z), 1/5, 1000000);
```

(29 min plus tard. . .)

Grande précision

```
> evaldiffeq(diffeq, y(z), 1/5, 1000000);
0.03325328125756750677245938192002439439106596134729 2863\
    13611785593075654371610784719859620906805710762776061\
    65993844793918297941976188620650536691082179149605904\
    31080482988558239935175505111768194891591740446771304\
    74730251896359727561534310095807343639273056518962333\
    97217595138842309884016425632431029577130431472108646\
    95485154767624024297343851584414126056237771911489680\
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
    97933258259972366466573219602501650218139747781157348\
    78322628655747195818205282428148240800376913561455564\
    29598794491231828039584256430669932365880956101719727\
    33806130243940574539991121877851105270752378138422728\
    76176859592508040781771637205060431902227437673286901\
    71292574098466950906705927590030494460150099288210121\
    868701569
```

Historique

- Schroeppel (1972) – Points particuliers
- Brent (1976) – Fonctions particulières, points quelconques
- Chudnovsky & Chudnovsky (1986-1988) – Méthode générale, esquisse points singuliers réguliers
- van der Hoeven (1999, 2001) – Algorithme complet avec bornes

- Ce travail – Mise en pratique : implémentation, améliorations d'efficacité, bornes optimales

Algorithme d'évaluation [Chudnovsky & Chudnovsky 1988]

Idées principales

0 multiplication rapide
1 scindage binaire
2 prolongement analytique
3 *bit burst*

0. On peut multiplier deux entiers de n bits en $O(n \log n \, 2^{O(\log^* n)})$ opérations binaires [Fürer 2007].

Algorithme d'évaluation [Chudnovsky & Chudnovsky 1988]

Idées principales

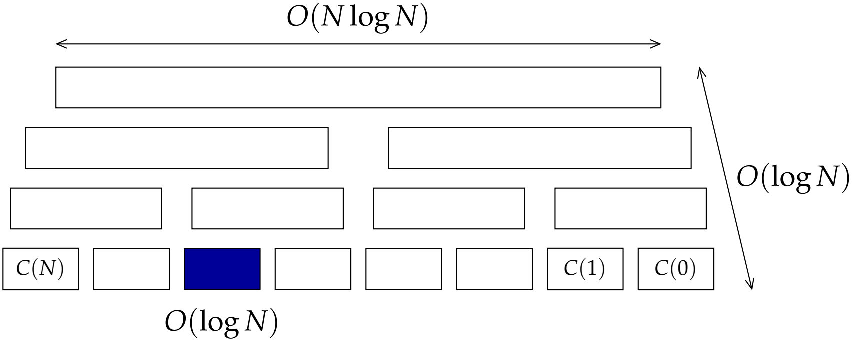
0 multiplication rapide

1 scindage binaire

2 prolongement analytique

3 *bit burst*

1. Dans le disque de convergence d'un développement de Taylor : sommer efficacement la série (récurrence)

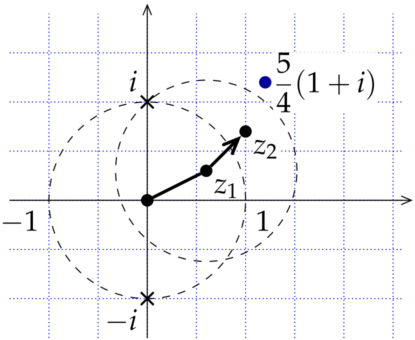


Algorithme d'évaluation [Chudnovsky & Chudnovsky 1988]

Idées principales

0 multiplication rapide
1 scindage binaire
2 prolongement analytique
3 *bit burst*

2. Évaluation hors du disque de convergence :
transporter les conditions initiales



$$\arctan\left(\frac{5}{4}(1+i)\right) = ?$$

$$\begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}570\ldots+0{,}220\ldots i \\ 0 & 0{,}728\ldots-0{,}206\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(z_2) \\ y'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}365\ldots+0{,}329\ldots i \\ 0 & 0{,}751\ldots-0{,}079\ldots i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(z_1) \\ y'(z_1) \end{bmatrix}$$

Algorithme d'évaluation [Chudnovsky & Chudnovsky 1988]

Idées principales

0 multiplication rapide
1 scindage binaire
2 prolongement analytique
3 *bit burst*

3. Points donnés à grande précision :
prolongement analytique même si la série converge

$$
\begin{aligned}
z_0 = 10_2 &\to z_1 = 10{,}1_2 \\
&\to z_2 = 10{,}101_2 \\
&\to z_3 = 10{,}1011011_2 \\
&\to z_4 = 10{,}101101110010100_2 \\
&\to \dots \\
&\to z \;\; = 10.1011011100101001100000\ldots\ldots_2 \simeq e
\end{aligned}
$$

$\sin(e) = \sin(2{,}718...) = ?$

Algorithme d'évaluation [Chudnovsky & Chudnovsky 1988]

Idées principales

0 multiplication rapide
1 scindage binaire
2 prolongement analytique
3 *bit burst*

Théorème (Chudnovsky²)

À z fixé, on peut calculer $y(z)$ à 2^{-n} près en

$$O\Big(M\Big(n \cdot (\log n)^3\Big)\Big)$$

opérations binaires.

Algorithme d'évaluation [Chudnovsky & Chudnovsky 1988]

Idées principales

0 multiplication rapide

1 scindage binaire

2 prolongement analytique

3 *bit burst*

Théorème (Chudnovsky², van der Hoeven)

À z fixé, on peut calculer $y(z)$ à 2^{-n} près en

$$O\Big(M\Big(n \cdot \cancel{(\log n)^3} (\log n)^2 \cdot \log\log n\Big)\Big)$$

opérations binaires.

Algorithme d'évaluation [Chudnovsky & Chudnovsky 1988]

Idées principales

0 multiplication rapide
1 scindage binaire
2 prolongement analytique
3 *bit burst*

Théorème (Chudnovsky^2, van der Hoeven, M.)

À z fixé, on peut calculer $y(z)$ à 2^{-n} près en

$$O\Big(M\Big(n \cdot \cancel{(\log n)^3} (\log n)^2 \cdot \cancel{\log} \log n\Big)\Big)$$

opérations binaires.

Améliorations

Suivi des erreurs

- Précision des calculs intermédiaires
- Bornes fines pour les troncatures de séries

« Facteur constant »

- Structure des matrices de récurrence
- Calcul simultané efficace de plusieurs dérivées

Points singuliers réguliers

- Méthode de Heffter-Poole simplifiée « à la Ore »
- Algorithme de scindage binaire explicite
- Traitement plus efficace des « logarithmes »

Évaluation aux points singuliers réguliers

```
> diffeq := diffeqtohomdiffeq(
    holexprtodiffeq(
      arctan(z), y(z)), y(z));
```

Évaluation aux points singuliers réguliers

```
> diffeq := diffeqtohomdiffeq(
    holexprtodiffeq(
      arctan(z), y(z)), y(z));
```

$$\mathit{diffeq} := \left\{-2\, z \left(\frac{d}{dz}\, y(z)\right) + (-1 - z^2) \left(\frac{d^2}{dz^2}\, y(z)\right), y(0) = 0, \mathrm{D}(y)(0) = 1\right\}$$

```
>
```

Évaluation aux points singuliers réguliers

```
> diffeq := diffeqtohomdiffeq(
    holexprtodiffeq(
      arctan(z), y(z)), y(z));
```

$$diffeq := \left\{ -2\,z\left(\frac{d}{dz}\,y(z)\right) + (-1 - z^2)\left(\frac{d^2}{dz^2}\,y(z)\right), y(0) = 0, \mathrm{D}(y)(0) = 1 \right\}$$

```
> subs(z=z-I, evaldiffeq(diffeq, y(z),
                                [0, I], ord=3));
```

Évaluation aux points singuliers réguliers

```
> diffeq := diffeqtohomdiffeq(
    holexprtodiffeq(
      arctan(z), y(z)), y(z));
```

$$diffeq := \left\{ -2\,z\left(\frac{d}{dz}\,y(z)\right) + (-1 - z^2)\left(\frac{d^2}{dz^2}\,y(z)\right), y(0) = 0, \mathrm{D}(y)(0) = 1 \right\}$$

```
> subs(z=z-I, evaldiffeq(diffeq, y(z),
                                [0, I], ord=3));
```

$$(-0.5000000000\,\mathrm{I})\left(\ln(z-\mathrm{I}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\,(z-\mathrm{I}) - \frac{1}{8}\,(z-\mathrm{I})^2\right) + (0.7853981634 + 0.3465735903\,\mathrm{I})$$

```
>
```

Évaluation aux points singuliers réguliers

```
> diffeq := diffeqtohomdiffeq(
    holexprtodiffeq(
      arctan(z), y(z)), y(z));
```

$$diffeq := \left\{ -2\,z \left(\frac{d}{dz}\, y(z) \right) + (-1 - z^2) \left(\frac{d^2}{dz^2}\, y(z) \right),\ y(0) = 0,\ D(y)(0) = 1 \right\}$$

```
> subs(z=z-I, evaldiffeq(diffeq, y(z),
```

$$(-0.5000000000\,I) \left(\ln(z - I \right.$$

$$+ (0.7853981634 + 0.34$$

```
>
```

Applications :

- Fonctions de Bessel
- Combinatoire analytique
- Galois différentiel

Bornes

Motivation (I) : évaluation numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n = \sum_{n=0}^{N-1} y_n z^n + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} y_n z^n}_{?}$$

Calculer les ordres de troncature et autres bornes ?

- Chudnovsky & Chudnovsky — Ordres de grandeur uniquement
- van der Hoeven (1999, 2001, 2003) — Bornes données par la formule de Cauchy

Bornes asymptotiquement optimales ?

Motivation (II) : suites récurrentes

Permutations de Baxter (OEIS A001181)

- $(n+2)(n+3)B_n = (7n^2+7n-2)B_{n-1} + 8(n-1)(n-2)B_{n-2}$,
  $B_0 = B_1 = 1$
- $B_n \leqslant 2{,}9 \cdot 8^n$

Formule de Chudnovsky et Chudnovsky pour π

- $$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} t_k$$
  $$\text{où} \quad t_k = \frac{(-1)^k (6k)! (13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k}}$$
- $$\left| \frac{640320^{3/2}}{12\pi} - \sum_{k=0}^{n-1} t_k \right| \leqslant 10^6 (2{,}3n^3 + 13{,}6n^2 + 25n + 13{,}6)\alpha^n$$
  $$\text{où } \alpha = \frac{1}{151931373056000} \simeq 0,66 \cdot 10^{-14}$$

Bornes « fines »

Entrée Récurrence + conditions initiales
$\{p_s(n)\, y_{n+s} + \cdots + p_0(n)\, y_n = 0, \quad y_0 = \ldots\}$

Sortie $|y_n| \leqslant n!^{p/q}\, \alpha^n\, \varphi(n)$

avec φ sous-exponentielle, i.e. $\varphi(n) = e^{o(n)}$

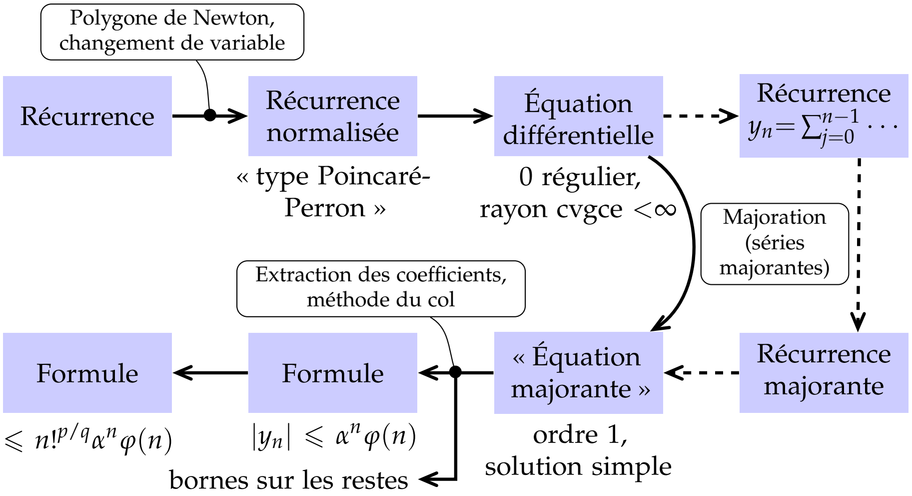
- borne correcte
- pour des conditions initiales génériques :
  p/q et α optimaux (voire $\varphi(n) = n^{O(1)}$)

Théorème

On peut calculer p/q, α, φ remplissant ces conditions.

M. Mezzarobba and B. Salvy. Effective bounds for P-recursive sequences. JSC, 2010.

Démarche



Polygone de Newton, changement de variable
Récurrence
Récurrence normalisée
« type Poincaré-Perron »
Équation différentielle
0 régulier, rayon cvgce $<\infty$
Récurrence $y_n = \sum_{j=0}^{n-1} \dots$
Majoration (séries majorantes)
Extraction des coefficients, méthode du col
Formule
$\leqslant n!^{p/q} \alpha^n \varphi(n)$
Formule
$|y_n| \leqslant \alpha^n \varphi(n)$
bornes sur les restes
« Équation majorante »
ordre 1, solution simple
Récurrence majorante

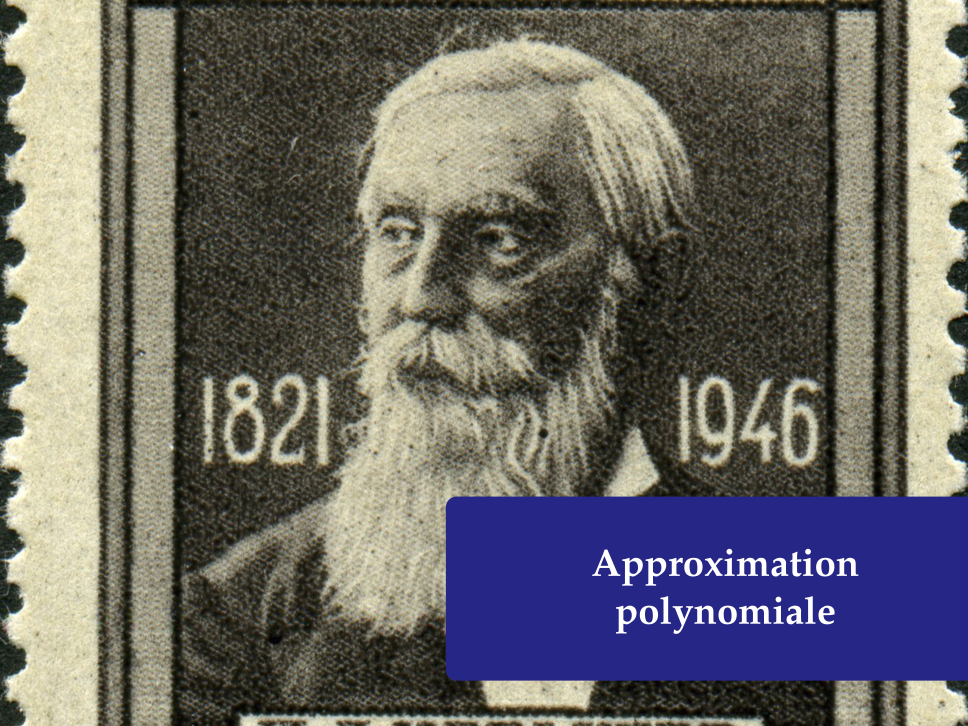
Influence sur l'évaluation numérique

	$\frac{\operatorname{arccot}(z)}{(z^2-1)(z^2+5)}$ @$\frac{1}{2}$	$\psi(1/2)$	$\arctan \frac{9}{10}$	$\arctan \frac{99}{100}$
10^{-10}	64/27	40/23	336/164	4238/1496
10^{-100}	380/321	342/313	2338/2108	25210/21848
10^{-1000}	3392/3307	3336/3293	22050/21754	231844/227810

	$\frac{\exp(1/(1-z))}{(1-z)}$ @$\frac{1}{2}$	$\operatorname{Bi}\left(\frac{1}{1-z}\right)$@$\frac{1}{2}$	$\operatorname{Ai}\left(\frac{1}{1-z}\right)$@$\frac{3}{4}$	$\operatorname{Ai}\left(\frac{1}{1-z}\right)$@$\frac{7}{8}$
10^{-10}	70/54	148/56	1558/77	23818/215
10^{-100}	418/387	664/416	3430/879	29258/2025
10^{-1000}	3568/3490	4700/3645	16284/8372	69594/18529

	e^{-100}	$\operatorname{erf}^2(1)$	$\operatorname{erf}(10)$	$\operatorname{erf}(100)$
10^{-10}	298/291	60/33	628/574	54492/54388
10^{-100}	456/450	190/163	936/894	54904/54800
10^{-1000}	1406/1402	1036/1011	2828/2800	58870/58772

nombre de termes calculé / nombre de termes minimal nécessaire



Approximation polynomiale

Évaluations répétées

```
[> deq := holexprtodiffeq(AiryAi(z), y(z)):
[>
```

Évaluations répétées

```
> deq := holexprtodiffeq(AiryAi(z), y(z)):
> myAi := diffeqtoproc(deq, y(z),
                           prec=12, disks=[[0,6]]):
```

Évaluations répétées

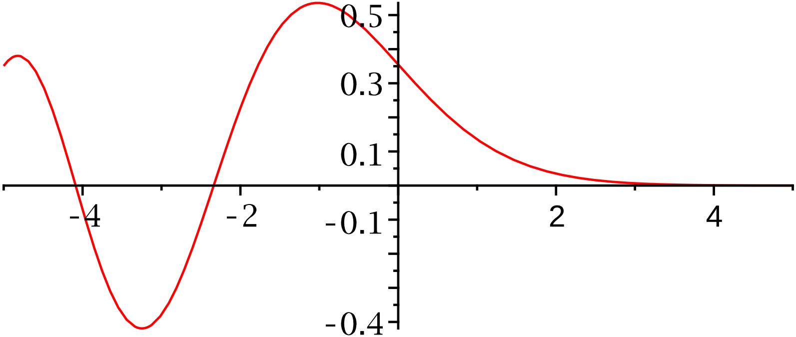
```
> deq := holexprtodiffeq(AiryAi(z), y(z)):
> myAi := diffeqtoproc(deq, y(z),
                       prec=12, disks=[[0,6]]):
>
```

Évaluations répétées

```
> deq := holexprtodiffeq(AiryAi(z), y(z)):
> myAi := diffeqtoproc(deq, y(z),
                         prec=12, disks=[[0,6]]):
> plot(myAi, -5..5);
```

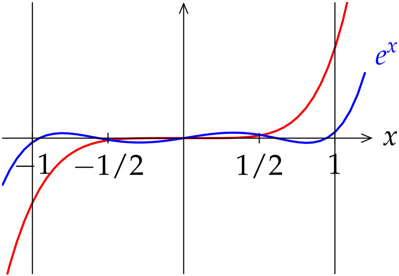
Évaluations répétées

```
> deq := holexprtodiffeq(AiryAi(z), y(z)):
> myAi := diffeqtoproc(deq, y(z),
                          prec=12, disks=[[0,6]]):
> plot(myAi, -5..5);
```




```
>
```

Séries de Taylor et séries de Tchebycheff



$e^x - (1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4)$

$$e^x - (1{,}2660T_0(x) + 1{,}1303T_1(x) + 0{,}2714T_2(x) + 0{,}0443T_3(x) + 0{,}0054T_4(x))$$

Approximation quasi-minimax

Pour toute fonction f continue sur $[-1;1]$,

$$\|f - p_d\|_\infty \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2}\log(d+1) + 4\right) \|f - p_d^*\|_\infty$$

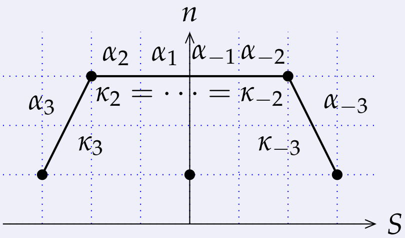
Historique & enjeux

- Calcul des coefficients de Tchebycheff
  - Lánczos (1938) – méthode τ
  - Clenshaw (1957) – calcul itératif à la Miller
- Récurrence
  - Fox & Parker (1968) – petits ordres, lien avec Clenshaw
  - Paszkowski (1975) – cas général
  - Geddes (1977), Rebillard (1998), Benoit & Salvy (2009) – calcul formel
- Calcul par intervalles sur les séries de Tchebycheff
  - Kaucher & Miranker (1984) – ultra-arithmétique
  - Brisebarre & Joldeş (2010) – ChebModels

Séries de Tchebycheff D-finies

Difficultés

- Solutions (toujours) divergentes
- Conditions initiales ?
- Certification du résultat



Démarche

1. Calcul des coefficients
2. Validation séparée

A. Benoit, M. Joldeş and M. Mezzarobba. Rigourous uniform approximation of D-finite functions using Chebyshev expansions. In preparation.

Calcul des coefficients à la Miller

Exemple

$$y(x) = e^x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, T_n(x) \qquad\qquad c_{n+1} + 2n\, c_n - c_{n-1} = 0$$

$$\begin{aligned}
u_0 &\approx -4{,}40 \cdot 10^{81} \\
u_1 &\approx 1{,}96 \cdot 10^{81} \\
u_2 &\approx -4{,}72 \cdot 10^{80} \\
&\vdots \\
u_{50} &\approx 1{,}02 \cdot 10^{2} \\
u_{51} &= 1 \\
u_{52} &= 0
\end{aligned}$$

$$c_n := u_n / S$$

$$\begin{aligned}
c_0 &\approx 1{,}27 \\
c_1 &\approx -5{,}65 \cdot 10^{-1} \\
c_2 &\approx 1{,}36 \cdot 10^{-1} \\
&\vdots \\
c_{50} &\approx 2{,}93 \cdot 10^{-80} \\
c_{51} &\approx 2{,}88 \cdot 10^{-82} \\
c_{52} &\approx 2{,}77 \cdot 10^{-84}
\end{aligned}$$

$$S = \sum_{n=-50}^{50} u_n \, T_n(0) \approx -3{,}48 \cdot 10^{81}$$

Calcul des coefficients

Complexité linéaire en l'indice de départ N.

Proposition (sous hypothèses simplificatrices)

L'erreur sur les coefficients calculés

$$\max_{n=0}^{N} \left| c_n^{[N]} - c_n \right|$$

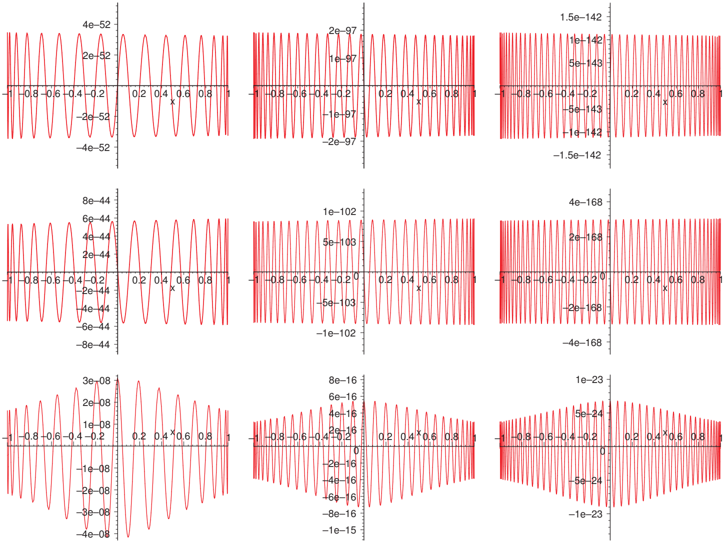
décroît exponentiellement avec N.

Qualité des polynômes calculés

$$\frac{e^{x/2}}{\sqrt{x+16}}$$

$$\frac{3\cos x - \sin x}{2}$$

$$e^{1/(1+2x^2)}$$



degré = 30   degré = 60   degré = 90

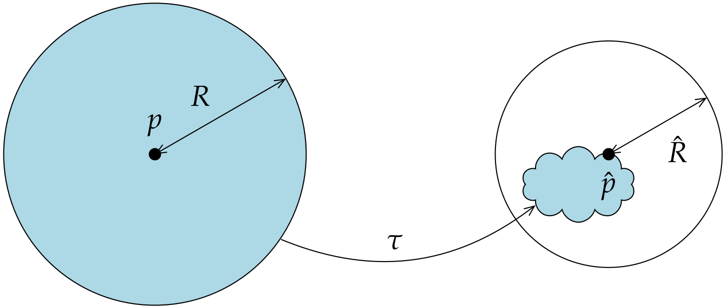
Validation

Entrée Opérateur différentiel, conditions initiales,
polynôme p de degré d, précision ε

Sortie R tel que $\|y - p\|_\infty \leqslant R = O\big(\sqrt{d}\,(\|y^{(r-1)} - p^{(r-1)}\|_\infty + \varepsilon)\big)$

$$\tau(y) := \left(x \mapsto y_0 + \int_0^x \frac{a(t)}{b(t)}\, y(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\|\tau(f) - \tau(g)\|_\infty \leqslant \gamma\,\|f - g\|_\infty$$
$$\gamma < 1$$



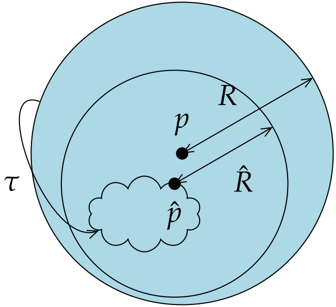
Validation

Entrée Opérateur différentiel, conditions initiales, polynôme p de degré d, précision ε

Sortie R tel que $\|y-p\|_\infty \leqslant R = O\big(\sqrt{d}\,(\|y^{(r-1)}-p^{(r-1)}\|_\infty+\varepsilon)\big)$

$$\tau(y) := \left(x \mapsto y_0 + \int_0^x \frac{a(t)}{b(t)}\,y(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\|\tau(f)-\tau(g)\|_\infty \leqslant \gamma\,\|f-g\|_\infty$$
$$\gamma < 1$$



$$\|p-\hat{p}\|_\infty + \hat{R} \leqslant R$$

Validation

Entrée Opérateur différentiel, conditions initiales, polynôme p de degré d, précision ε

Sortie R tel que $\|y - p\|_\infty \leqslant R = O\big(\sqrt{d}\,(\|y^{(r-1)} - p^{(r-1)}\|_\infty + \varepsilon)\big)$

$$\tau(y) := \left(x \mapsto y_0 + \int_0^x \frac{a(t)}{b(t)}\, y(t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad \|\tau(f) - \tau(g)\|_\infty \leqslant \gamma\,\|f - g\|_\infty$$

$$\gamma < 1$$

Algorithme

- Prendre i assez grand
- Calculer $p_i \approx \tau^i(p)$
- Renvoyer $R \geqslant \dfrac{\|p - p_i\|_\infty + \text{(erreurs)}}{1 - \gamma_i}$

Validation

Entrée Opérateur différentiel, conditions initiales, polynôme p de degré d, précision ε

Sortie R tel que $\|y - p\|_\infty \leqslant R = O\big(\sqrt{d}\,(\|y^{(r-1)} - p^{(r-1)}\|_\infty + \varepsilon)\big)$

$$\tau(y) := \left(x \mapsto y_0 + \int_0^x \frac{a(t)}{b(t)}\, y(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\|\tau(f) - \tau(g)\|_\infty \leqslant \gamma\, \|f - g\|_\infty$$
$$\gamma < 1$$

Algorithme

- Prendre i assez grand
- Calculer $p_i \approx \tau^i(p)$ — O(d) ops
- Renvoyer $R \geqslant \dfrac{\|p - p_i\|_\infty + (\text{erreurs})}{1 - \gamma_i}$ — O(d) ops

Qualité des bornes validées

$$\log_{10} \frac{\text{(borne calculée)}}{\|y - p\|_\infty}$$

$\frac{e^{x/2}}{\sqrt{x+16}}$	4,8	0,58	0,57
$\frac{3\cos x - \sin x}{2}$	3,1	3,7	4,1
$e^{1/(1+2x^2)}$	0,57	0,56	0,56
	degré = 30	degré = 60	degré = 90

En bref

- Prolongement analytique numérique multiprécision
  général – garanti – automatique – rapide
- Bornes fines
  suites – séries majorantes – restes de séries
- Approximants polynomiaux sur la base de Tchebycheff
  complexité linéaire en le degré – bornes d'erreur fines

Code disponible

`http://algo.inria.fr/libraries/` (GNU LGPL)

Perspectives

- NumGfun 1.0 et au-delà
- Travaux en cours sur l'approximation polynomiale
- Calcul formel pour l'arithmétique des ordinateurs

En bref

- Prolongement analytique numérique multiprécision
  général – garanti – automatique – rapide
- Bornes fines
  suites – séries majorantes – restes de séries
- Approximants polynomiaux sur la base de Tchebycheff
  complexité linéaire en le degré – bornes d'erreur fines

Code disponible

`http://algo.inria.fr/libraries/` (GNU LGPL)

Perspectives

- NumGfun 1.0 et au-delà
- Travaux en cours sur l'approximation polynomia
- Calcul formel pour l'arithmétique des ordinateurs

Merci !

En bref

- Prolongement analytique numérique multiprécision
  général – garanti – automatique – rapide
- Bornes fines
  suites – séries majorantes – restes de séries
- Approximants polynomiaux sur la base de Tchebycheff
  complexité linéaire en le degré – bornes d'erreur fines

Code disponible

`http://algo.inria.fr/libraries/` (GNU LGPL)

Perspectives

- NumGfun 1.0 et au-delà
- Travaux en cours sur l'approximation polynomiale
- Calcul formel pour l'arithmétique des ordinateurs

Scindage binaire

Computing π

A Matrix Formula

1. $$s_n = 12 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\,(6k)!\,(13591409 + 545140134k)}{(3k)!\,(k!)^3\,640320^{3k+3/2}} = \sum_{k=0}^{n-1} t_k$$
   where $t_{k+1} = \mathrm{rat}(k)\, t_k$

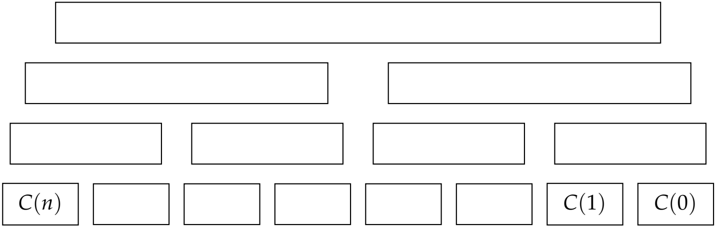
2. hence $$\begin{bmatrix} t_{k+1} \\ s_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{rat}(k) & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C(k)} \begin{bmatrix} t_k \\ s_k \end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix} t_n \\ s_n \end{bmatrix} = C(n-1)\cdots C(1)\,C(0)\, \begin{bmatrix} t_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * \\ \pi \end{bmatrix} \quad \text{as } n \to \infty$$

Computing π

Product Tree

$$C(n-1)\cdots C(1)\cdot C(0) = \left(C(n-1)\cdots C(\lfloor \tfrac{n}{2}\rfloor + 1)\right)\cdot\left(C(\lfloor \tfrac{n}{2}\rfloor)\cdots C(0)\right)$$

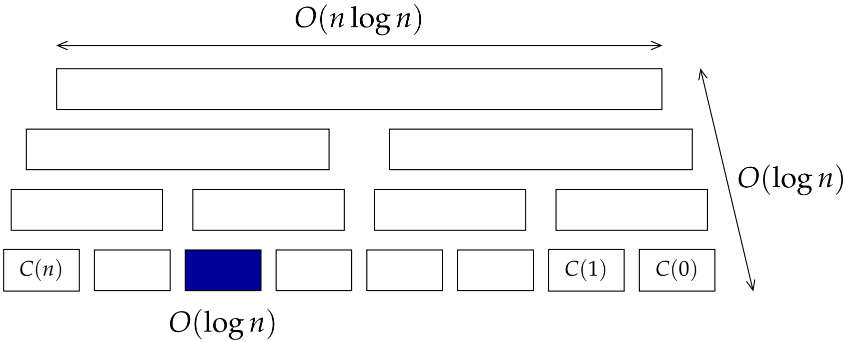


Overall complexity $\simeq$ area = $n \times$ (logarithmic factors)

Computing π

Product Tree

$$C(n-1)\cdots C(1)\cdot C(0) \\ = \left(C(n-1)\cdots C(\left\lfloor \tfrac{n}{2}\right\rfloor + 1)\right)\cdot\left(C(\left\lfloor \tfrac{n}{2}\right\rfloor)\cdots C(0)\right)$$



Overall complexity $\simeq$ area = $n \times$ (logarithmic factors)

Bit burst

$$
\begin{aligned}
z_0 = 10_2 &\to z_1 = 10{,}1_2 \\
&\to z_2 = 10{,}101_2 \\
&\to z_3 = 10{,}1011011_2 \\
&\to z_4 = 10{,}101101110010100_2 \\
&\to \ldots \\
&\to z \ = 10.1011011100101001100000\ldots\ldots\ldots_2 \simeq e
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{|z_{j+1} - z_j| \leqslant 2^{-2^j}}
$$

Pas j $\quad O\Big(\mathrm{M}\Big(\frac{n\ (h + \log n)}{\log(\rho/|\delta z|)}\log n\Big)\Big) \qquad \begin{cases} h = O(2^j) \\ |\delta z| \leqslant 2^{2^{-j}} \end{cases}$

Coût total $\quad O\Big(\sum_{j=0}^{O(\log n)} \mathrm{M}\Big(\frac{n\ (2^j + \log n)}{2^j}\log n\Big)\Big) = O(M(n \log^2 n))$

Points singuliers réguliers

$$z^2\, y''(z) + z\, y'(z) + (z^2 - \nu^2)\, y(z)$$

0 point singulier

régulier

pour toute solution y,
$\exists N$ tq $y(z) = O(1/|z|^N)$
quand $z \to 0$

ex. : $y(z) = z^{\sqrt{2}}$, $y(z) = \dfrac{\log z}{z}$

irrégulier

croissance non-poly.
en $1/|z|$ possible
quand $z \to 0$

ex. : $y(z) = e^{1/z}$

Théorème (Fuchs, 1866)

Si 0 est un point singulier régulier d'une équation différentielle linéaire à coefficients analytiques, celle-ci admet pour un certain voisinage D de 0 une base de solutions de la forme

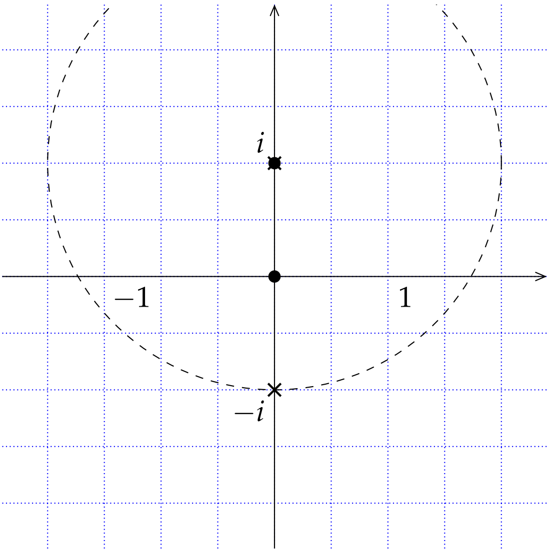
$$z^{\lambda}\big(y_0(z) + y_1(z)\log z + \cdots + y_t(z)\log^t z\big), \quad z \in D \setminus \{0\}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et les y_i sont analytiques sur D.

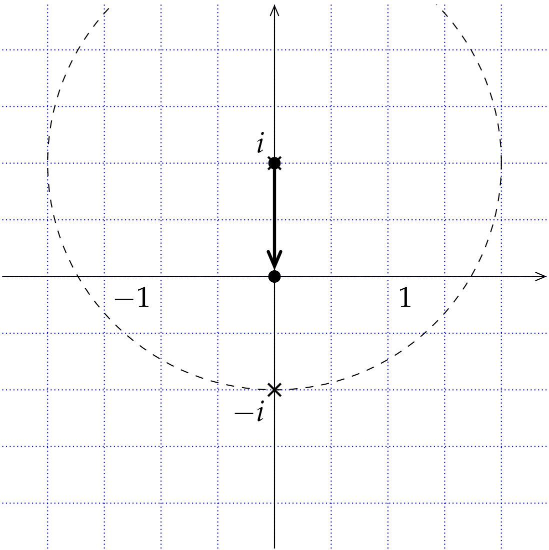
$$L\left(z, z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) \cdot y(z) = 0$$

$$y(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\, z^n \qquad\qquad L(S_n^{-1}, n) \cdot (y_n) = 0$$

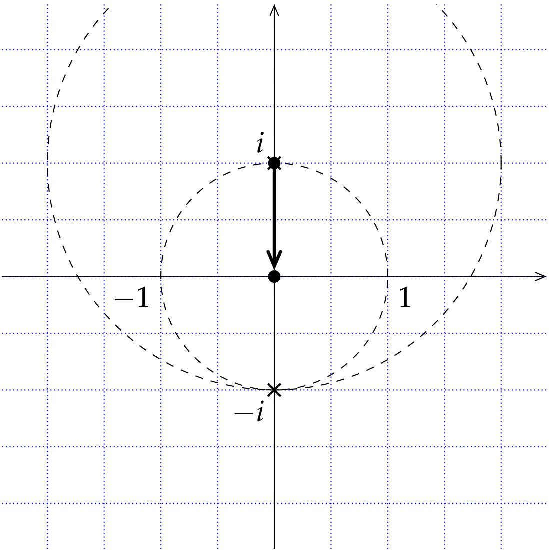
$$y(z) = \sum_{n\in\lambda+\mathbb{Z}} \sum_{k\geqslant 0}^{\text{(finie)}} y_n\, \frac{\log^k z}{k!}\, z^n \qquad\qquad L(S_n^{-1}, n + S_k) \cdot (y_{n,k}) = 0$$



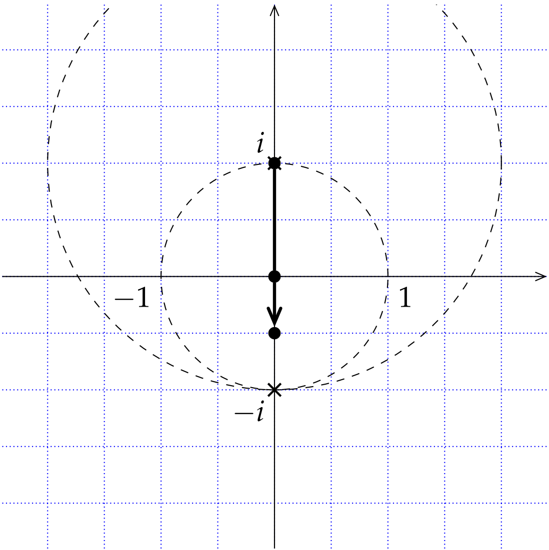
i
−1
1
−i



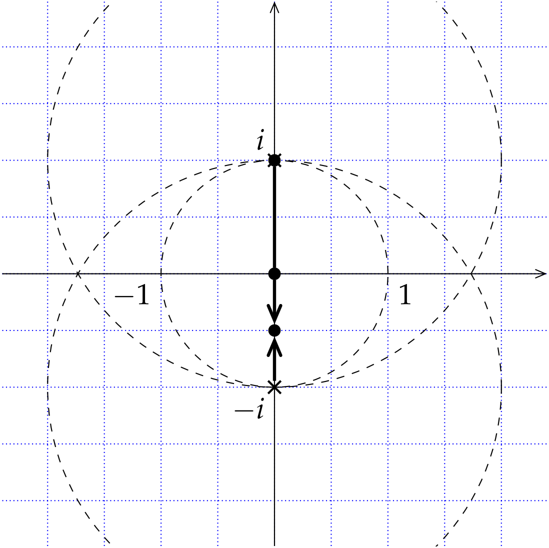
i
−1
1
−i



i
-1
1
$-i$



i
-1
1
$-i$



i
-1
1
$-i$

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} & \zeta^{n+1} \\ & \vdots \\ y_{n+s-1} & \zeta^{n+1} \\ y_{n+s} & \zeta^{n+1} \\ \multicolumn{2}{c}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i \zeta^i} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} & 1 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \zeta & \mathbf{0} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} y_n & \zeta^n \\ & \vdots \\ y_{n+s-2} & \zeta^n \\ y_{n+s-1} & \zeta^n \\ \multicolumn{2}{c}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i \zeta^i} \end{bmatrix}$$

$$\zeta = z + \varepsilon \quad \Big(+ O(\varepsilon^r) \Big)$$

Bornes

Paramètres

$\kappa, \alpha, \ldots \in \mathbb{Q}$ ou $\bar{\mathbb{Q}}$ t.q.

$$|y_n| \leqslant n!^{\kappa} \cdot \alpha^n \cdot \varphi(n)$$

Outils : méthode des séries majorantes + analyse asymptotique élémentaire
(M. & Salvy 2010)

Bornes symboliques

- Lisibles (presque !)
- Asymptotiquement fines

Bornes numériques

- Approx. sûres des paramètres
- Plus rapide (pas d'algébriques)

Idée : Replacer y par une fonction simple qui la « domine »

Méthode des séries majorantes

$y'(z) = a(z)\, y(z) \qquad a(z)$ analytique pour $|z| < \rho$

- $(n+1)y_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} a_j y_{n-j}$
- Soit M tel que $\forall j, |a_j| \leqslant M/\gamma^j$, considérons $(n+1)g_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} M\gamma^{-j} g_{n-j}$;
- on a alors $g'(z) = M(1 - z/\gamma)^{-1} g(z)$ donc $g(z) \propto (1 - z/\gamma)^{-\gamma M}$.
- Par récurrence $|y_0| \leqslant g_0 \implies \forall n, |y_n| \leqslant g_n$
- or $g(z)$ est analytique pour $|z| < \gamma$ $(\to \rho)$. $\square$

Méthode des séries majorantes

$y'(z) = a(z)\,y(z) \quad a(z)$ analytique pour $|z| < \rho$

- $(n+1)y_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} a_j y_{n-j}$
- Soit M tel que $\forall j, |a_j| \leqslant M/\gamma^j$, considérons
  $(n+1)g_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} M\gamma^{-j} g_{n-j}\,;$
- on a alors $g'(z) = M(1 - z/\gamma)^{-1} g(z)$
  donc $g(z) \propto (1 - z/\gamma)^{-\gamma M}$.
- Par récurrence $|y_0| \leqslant g_0 \implies \forall n, |y_n| \leqslant g_n$
- or $g(z)$ est analytique pour $|z| < \gamma$ $(\to \rho)$. □

Difficultés

- On veut $\gamma = \rho$
- 0 singulier rég.

Séries majorantes « fines »

Équation majorante : $g'(z) = \frac{\alpha K}{(1-\alpha z)^{1+T}} g(z)$

$T = 0$ $g(z) = \frac{A}{(1-\alpha z)^K}$

$$|y_n| \leqslant g_n = A \binom{n+K-1}{K-1} \alpha^n$$

$T > 0$ $g(z) = A \exp \frac{K/T}{(1-\alpha z)^T}$

$|y_n| \leqslant g_n \leqslant A \exp\left(C n^{T/(T+1)}\right) \alpha^n$ pour $n \geqslant N$
(méthode du col)

Bonus : bornes sur les restes, sur les dérivées

Crédits

Source des photos :

- *Tables of the error function and its derivative*. US National Bureau of Standards, 1954 (domaine public)
- `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Calipers_in_physics_lab.jpg` (par User:Falcorian, Creative Commons Attribution-Share Alike)
- `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Stamp_of_USSR_1047.jpg` (par User:Butko, repris de `http://kolekzioner.net/modules/smartsection/item.php?itemid=211`, domaine public)
- `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Meilenstein-hohen-neuendorf.jpg` (par User:Saxo, domaine public)

Some icons used in this document are from the Oxygen icon set (`http://oxygen-icons.org`), licensed under the GNU Lesser General Public Licence v. 3.