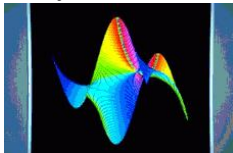


# Suites et fonctions holonomes : évaluation numérique et calcul automatique de bornes

Marc Mezzarobba

Projet ALGORITHMS



INRIA Paris Rocquencourt

Groupe de travail Cacao, 16 octobre 2008

# **Introduction**

**(ou : un peu de code)**

# Suites et fonctions holonomes

## Définition

- ▶ Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **holonome** (ou P-réursive) si elle est solution d'une récurrence linéaire (homogène) à coefficients polynomiaux :

$$a_r(n) u_{n+s} + \cdots + a_1(n) u_{n+1} + a_0(n) u_n = 0, \quad a_j \in \mathbb{Q}(i)[n].$$

- ▶ Une fonction  $y(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est **holonome** (D-finie) si elle est solution d'une équation différentielle linéaire (homogène) à coefficients polynomiaux :

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0, \quad a_j \in \mathbb{Q}(i)[z].$$

# Suites et fonctions holonomes

## Propriétés

- ▶ Une fonction analytique est D-finie si et seulement si la suite de ses coefficients de Taylor est P-récurrente
- ▶ Les sommes et produits de suites holonomes sont holonomes
- ▶ Les sommes, produits, dérivées, primitives de fonctions analytiques holonomes sont holonomes

## Slogan (d'après Stanley, Lipshitz, Zeilberger)

Équation différentielle (récurrence) + conditions initiales  
= structure de données

$$\arctan(z) = \left\{ \begin{array}{l} (1 + z^2) y''(z) + 2z y'(z) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{array} \right\}$$

# NumGfun

- ▶ Module Maple pour la manipulation symbolique-numérique des suites et fonctions holonomes
  - ▶ Évaluation numérique garantie
  - ▶ Bornes
  - ▶ ...
- ▶ Version 0.2 disponible (expérimental !), LGPL  
<http://www.marc.mezzarobba.net/code/NumGfun-current.tgz>
- ▶ Intégration à [gfun](#) / [alolib](#) en cours  
<http://algo.inria.fr/libraries/>



D.V. and G.V. Chudnovsky. Approximations and complex multiplication according to Ramanujan. 1988.



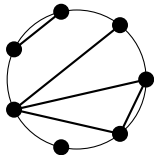
J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions. 1999.



Bruno Salvy and Paul Zimmermann, Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. 1994.

## Scindage binaire pour les suites (I)

Nombre de Motzkin (OEIS A001006)



0, 1, 1, 2, 4,  
9, 21, 51,  
127, 323,  
835, 2188,  
5798, 15511,  
41835,  
113634,  
310572, ...

$$(n + 3) M_{n+2} = 3n M_n + (2n + 3) M_{n+1},$$

$$M_0 = 0, M_1 = M_2 = 1$$

$$M_{1\,000\,000} = 87836485521410228205552857212867952$$

$$60648460114018772686310027332206011651992742068$$

$$95017531901406553089345501470120232183076893776$$

$$76219223691237769669136651142176793088580998640$$

$$24791593930900669539159753966399354360360024084$$

$$835778 \dots 6784078518570776088261222699220919525$$

$$44768602806558705745804408930594940932105099980$$

$$80763012645020992166911388664219549747372475451$$

$$13677895449716717989937706488976239581832306432$$

$$74956942565741376149791829585290393680786291940$$

(477 112 chiffres)



## Fonctions élémentaires, fonctions spéciales

$$(1 + z^2) \arctan''(z) + 2z \arctan'(z) = 0$$

$$\arctan \frac{3(1+i)}{5} \simeq 0,670782196758950644190815337$$

4705632571369265547562721682009119775363456

2788546268206648547182112134208947460355580

1433079787592299964529081793221227836458496

7241027751816658681028242709786087804231203

5059588657436137542728611075919334091735855

+ 0,4313775209217135982596553539683059915248

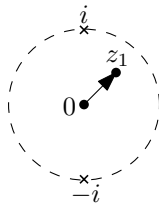
7122502784763704416333662458132714904677846

9188664848592351371193308077157250027646988

5281752378714171283456698686337133570545945

8746821430812351884522098343403327937148536

338890142864171080500321 *i*



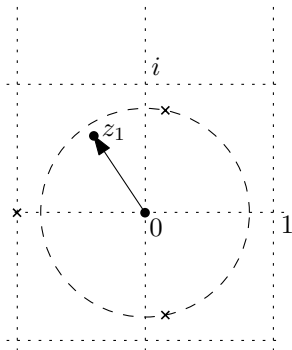


## Fonctions holonomes générales

$$(z + 1)(3z^2 - z + 2)y''' + (5z^3 + 4z^2 + 2z + 4)y'' + (z + 1)(4z^2 + z + 2)y' + (4z^3 + 2z^2 + 5)y = 0$$

$$y(0) = 0, y'(0) = i, y''(0) = 0$$

$$y(z_1) \simeq -0,5688220713892109968232887489539 \\ 40401816728372266594043883320346219592758 \\ 12320494797058201136707120728488174753296 \\ 40179618640233165335353913821228176742066 \\ 38746845195076195216482627052648481989147 \\ -0,41951120825888216814674495005568322636 \\ 04890369475390958159560577151580169021584 \\ 69436992399704818660023662419290957376458 \\ 10730416775833847769588392648233263560262 \\ 18036663454753771692569046113725631 i$$



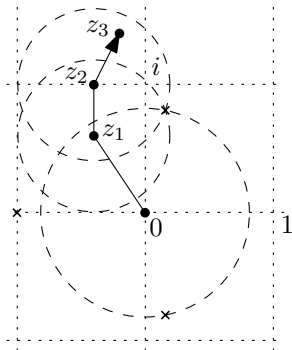
$$z_1 = \frac{-2 + 3i}{5}$$

## Prolongement analytique numérique

$$(z + 1)(3z^2 - z + 2)y''' + (5z^3 + 4z^2 + 2z + 4)y'' + (z + 1)(4z^2 + z + 2)y' + (4z^3 + 2z^2 + 5)y = 0$$

$$y(0) = 0, y'(0) = i, y''(0) = 0$$

$$y(z_3) \simeq -1,5598481440603221187326507993405 \\ 93389341334664487959500453706337545990130 \\ 23595723610120655516690697098992400952293 \\ 02516117147544713452845642644966476254288 \\ 76662237635657163415131886063430803161039 \\ - 0.71077649435126718436732868786933143977 \\ 59047479618104045777076954591551406949345 \\ 14336874295533356649869509377592841606239 \\ 84373919434109735084282549387411069877437 \\ 70372320294299156084733705293726504 i$$



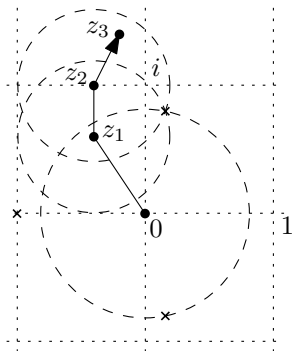
$$z_3 = \frac{-1 + 7i}{5}$$

## Prolongement analytique : connexion entre points réguliers

$$(z+1)(3z^2 - z + 2)y''' + (5z^3 + 4z^2 + 2z + 4)y'' + (z+1)(4z^2 + z + 2)y' + (4z^3 + 2z^2 + 5)y = 0$$

$$\begin{bmatrix} y(z_3) \\ y'(z_3) \\ y''(z_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1,229919181 & -0,710776494 & -1,680450593 \\ +1,222484838i & +1,559848144i & +0,8612944465i \\ 2,192415163 & 1,428307159 & 1,683681888 \\ -0,982260350i & +1,237636972i & +1,443224767i \\ -0,810105380 & 0,949416034 & -0,309094585 \\ -0,813018670i & -0,368995278i & -0,032241130i \end{bmatrix}$$



$$z_3 = \frac{-1 + 7i}{5}$$

## Points de grande taille

Évaluation par *bit burst*

$\operatorname{erf}(\pi) \simeq 0.9999911238536323583947316207812029447123820815$   
1287659904758639164678439426196498460278504541782613310  
0604326482152030660441196387585407489394338729142916313  
2555230902334047429212609807578643285046857228864728035  
3074866062036004350772927038034048195719630178507694248  
4951063443190106356178078634699387973616755577593078576  
7867193730580658008654893571733600902958925087790354763  
1634821321290934135517729080384812555377261445353232562  
6651433607961144658060331385205962860463925296434774976  
4667106060908609383010103929356543447438130957966770981  
9560099884058213492947592606412648383713291083934904913  
3976893748259243076371780227275937091363807381587573107

(Implémentation des bornes incomplète dans ce cas)

## Bornes

► Permutations de Baxter (OEIS A001181)

- $(n+2)(n+3)B_n = (7n^2 + 7n - 2)B_{n-1} + 8(n-1)(n-2)B_{n-2}$ ,  
 $B_0 = B_1 = 1$
- $B_n \leq (n+8)^8 8^n$

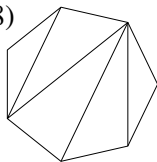
► Formule des Chudnovsky

- $\frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} t_k = \frac{1}{\pi}$  où  $t_k = \frac{(-1)^k (6k)! (13591409 + 545140134k)}{(3k)! (k!)^3 640320^{3k}}$
- $\left| \frac{640320^{3/2}}{12\pi} - \sum_{k=0}^{n-1} t_k \right| \leq (0,1n^4 + 0,5n^3 + 1,5n^2 + 2,1n + 1)\alpha^n$   
 où  $\alpha = \frac{1}{151931373056000} \simeq 0,66 \cdot 10^{-14}$

**Un terme d'une suite  
récurrente**

## Encore quelques exemples

- ▶ Nombres de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  (OEIS A000108)
  - ▶ Mots de Dyck de longueur  $2n$ , triangulations du  $n$ -gone convexe...
  - ▶  $(n+2)C_{n+1} = (4n+2)C_n$ ,  
 $C_0 = 1$



- ▶  $\Gamma(z)$  pour  $z \in \mathbb{Q}[i]$  (Haible & Papanikolaou 1997 ?)

- ▶ Sans perte de généralité  $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$

- ▶ 
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$= k^z e^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z \uparrow (n+1)} k^n + \int_k^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

sommes partielles  
holonomes !

- ▶ Contrôler l'intégrale et le reste de la série pour conclure

# Algorithme

## Écriture matricielle de la récurrence

►  $a_s(n) u_{n+s} + \dots + a_1(n) u_{n+1} + a_0(n) u_n = 0$

► 
$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+s-1} \\ u_{n+s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \square & \square & \dots & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+s-2} \\ u_{n+s-1} \end{bmatrix}$$

fractions rationnelles en  $n$



# Algorithme

## Écriture matricielle de la récurrence

►  $a_s(n) u_{n+s} + \dots + a_1(n) u_{n+1} + a_0(n) u_n = 0$

► 
$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+s-1} \\ u_{n+s} \end{bmatrix} = \frac{1}{q(n)} \underbrace{\begin{bmatrix} q & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \square & \square & \dots & \square \end{bmatrix}}_{A(n)} \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+s-2} \\ u_{n+s-1} \end{bmatrix}$$

polynômes  
en  $n$

# Algorithme

## Écriture matricielle de la récurrence

$$\blacktriangleright a_s(n) u_{n+s} + \cdots + a_1(n) u_{n+1} + a_0(n) u_n = 0$$

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+s-1} \\ u_{n+s} \end{bmatrix} = \frac{1}{q(n)} \underbrace{\begin{bmatrix} q & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \square & \square & \cdots & \square \end{bmatrix}}_{A(n)} \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+s-2} \\ u_{n+s-1} \end{bmatrix}$$

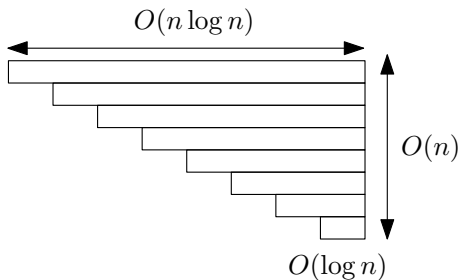
$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} u_N \\ \vdots \\ u_{N+s-1} \end{bmatrix} = \frac{A(N-1) \cdots A(0)}{q(N-1) \cdots q(0)} \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{s-1} \end{bmatrix}$$

(« Factorielle de matrices »)

# Algorithme

Scindage binaire (vs méthode naïve)

$$A(n-1) \cdots A(1) \cdot A(0)$$

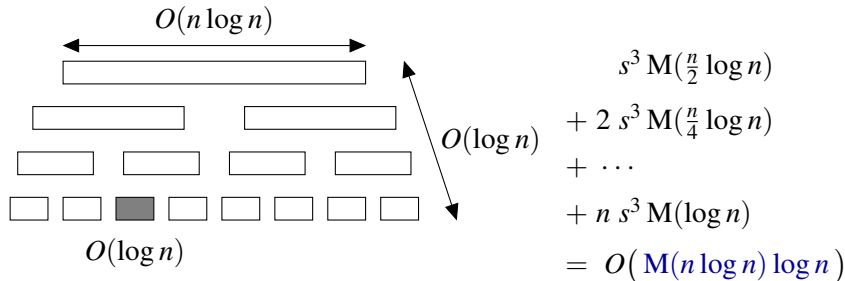


Produit naïf /  
calcul itératif :  
 $\Omega(n^2 \log n)$

# Algorithme

Scindage binaire (vs méthode naïve)

$$A(n-1) \cdots A(1) \cdot A(0) \\ = (A(n-1) \cdots A(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)) \cdot (A(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \cdots A(0))$$



**Facteur constant**

## « Constante », *i.e.* autres paramètres

- ▶ Tout se ramène à des additions / multiplications de grands entiers
- ▶ On gagne un facteur constant si on fait moins de multiplications
  - ▶  $M(n) \gg n$  : même au prix d'additions / mult. par des constantes supplémentaires
  - ▶ Facteur « constant » : ordre  $s$  fixé, c'est  $n$  qui  $\rightarrow \infty$
- ▶ Domaines d'application du scindage binaire :
 

$\mathbb{Z}$     $\mathbb{Q}$  ( $\rightsquigarrow \mathbb{Z}^2$ )    $\mathbb{Q}[i]$  ( $\rightsquigarrow \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}$ )    $\mathbb{Z}[X]/\langle X^k \rangle$     $\mathbb{Q}[i]^{n \times n}$

...ou n'importe quelle  $\mathbb{Z}$ -algèbre finie (sans torsion)
- ▶ Libertés
  - ▶ Choix de l'algèbre
  - ▶ Choix de l'algorithme pour multiplier dans cette algèbre

## Exemple

Gagner 20% dans  $\mathbb{Q}(i)$

Karatsuba :

$$(x + iy)(x' + iy') = (u - v) + i(w - u - v)$$
$$\text{où } \begin{cases} u = xx' \\ v = yy' \\ w = (x + y)(x' + y') \end{cases}$$

**3 + 1 (dénominateurs) = 4 multiplications** au lieu de 5

Plus généralement, si  $\text{car } \mathbb{K} = 0$ , produit dans  $\mathbb{K}[X]/\langle Q \rangle$

en **2 deg Q - 1** multiplications dans  $\mathbb{K}$  (Toom-Cook).

## Scindage binaire dans une algèbre « quelconque »

- ▶  $A$  une  $\mathbb{Z}$ -algèbre (finie sans torsion), éléments représentés dans une base
- ▶  $L =$  **complexité multiplicative** (quadratique) de  $A$   
= nombre de multiplications pour calculer  $x \cdot y \in A$   
par des opérations  $+$  et  $\times$  dans  $\mathbb{Z}$ 
  - ▶ les mult. par des constantes ne comptent pas
  - ▶ les opérandes des mult. non constantes doivent être des formes linéaires  $\lambda(a, b)$



## Scindage binaire dans une algèbre « quelconque »

- ▶  $A$  une  $\mathbb{Z}$ -algèbre (finie sans torsion), éléments représentés dans une base
- ▶  $L =$  complexité multiplicative (quadratique) de  $A$

### Proposition

Le calcul par scindage binaire d'un produit  $x_1 \dots x_n$  d'éléments de  $A$  de hauteur (taille coef.)  $\leq h$  prend au plus

$$\frac{L}{2} M\left((h + K)n \log_2 n\right) (1 + o_{n \rightarrow \infty}(1))$$

opérations binaires, pour un certain  $K$ .

## Multiplication de petites matrices

Taille	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Naïf	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
NCom	<b>7</b>	23	49	100	161	273	343	529	700
Com	<b>7</b>	<b>22</b>	<b>46</b>	<b>93</b>	<b>141</b>	<b>235</b>	<b>316</b>	<b>473</b>	<b>595</b>

Taille	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Naïf	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859
NCom	992	1125	1580	1778	2300	2401	3218	3342	4369
Com	<b>831</b>	<b>987</b>	<b>1333</b>	<b>1561</b>	<b>2003</b>	<b>2212</b>	<b>2865</b>	<b>3231</b>	<b>3943</b>

- ▶ Strassen 1977:

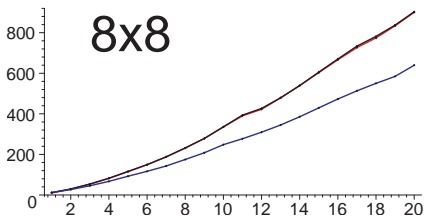
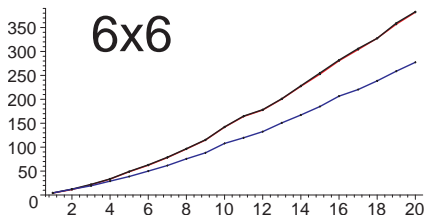
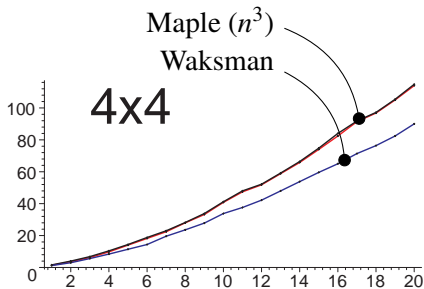
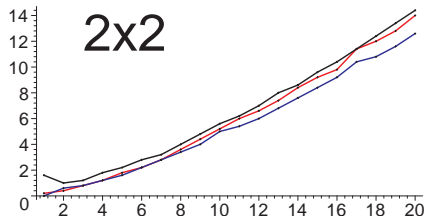
$2 \times 2$  en 7 mul. (non commutatives)

- ▶ Waksman 1970:

$n \times n$  en  $n^2 \lceil \frac{n}{2} \rceil + (2n - 1) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2}$  mul. commutatives

# Produit matriciel en Maple 10

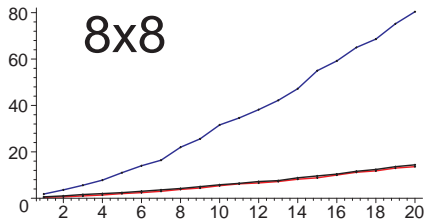
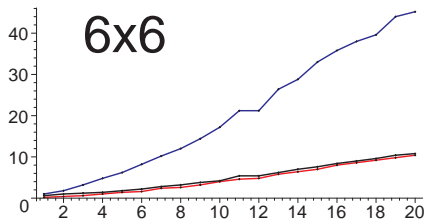
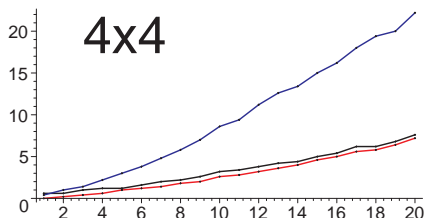
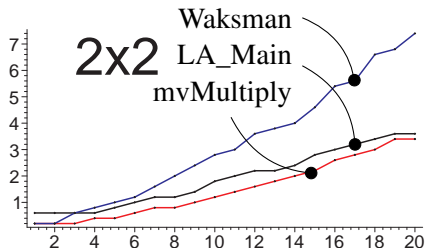
Matrices denses



Taille des entrées (milliers de chiffres décimaux) / Temps (unité arbitraire)

# Produit matriciel en Maple 10

## Matrices compagnon



Taille des entrées (milliers de chiffres décimaux) / Temps (unité arbitraire)

## Écriture matricielle alternative

$$L = L_k \cdots L_1 \quad \text{où} \quad L_j = S^{r_j} - c_{r_j-1}^{[j]} S^{r_j-1} - \cdots - c_0^{[j]}$$

$$L \cdot u = 0$$

$$u^{[1]} = L_1 \cdot u \quad u_{n+r_0} = c_0^{[0]} u_n + \cdots + c_{r_0-1}^{[0]} u_{n+r_0-1} + u_n^{[1]}$$

$$u^{[2]} = L_2 \cdot u^{[1]} \quad u_{n+r_1}^{[1]} = c_0^{[1]} u_n^{[1]} + \cdots + c_{r_1-1}^{[1]} u_{n+r_1-1}^{[1]} + u_n^{[0]}$$

⋮

$$u^{[k]} = L_k \cdot u^{[k-1]} \quad u_{n+r_k}^{[k]} = c_0^{[k]} u_n^{[k]} + \cdots + c_{r_k-1}^{[k]} u_{n+r_k-1}^{[k]} = 0$$

$$= 0$$

**Exemple :** pour les sommes partielles d'une suite holonome on a  
 $L = (S - 1)L'$



# Évaluation numérique

# Évaluation de fonctions holonomes : stratégie générale

## Objectif

Évaluer des fonctions spéciales (D-finies) à grande précision  $d \rightarrow \infty$

Supposons  $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n$ . Pour calculer  $y(z_1)$  à  $\varepsilon = 10^{-d}$  près :

1. Calculer  $N$  tel que  $\left| y(z_1) - \sum_{n=0}^{N-1} y_n z_1^n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ 
  - ▶ **Bornes** (Van der Hoeven 1999, 2001, 2003, 2006)
2. Calculer  $\sum_{n=0}^{N-1} y_n z_1^n$  :
  - ▶ **Scindage binaire + bit burst** (Brent 1976, Chudnovsky<sup>2</sup> 1988...)
  - ▶ Général, efficace, simple
  - ▶ Fréquemment utilisé... dans des cas particuliers !



D.V. and G.V. Chudnovsky. Approximations and complex multiplication according to Ramanujan. 1988.



J. van der Hoeven. Majorants for formal power series. 2003.



## Espace de solutions, rayon de convergence

### Théorème de Cauchy

Si  $a_r(z_0) \neq 0$ , les solutions analytiques (au voisinage de  $z_0$ ) de

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0$$

forment un espace vectoriel de dimension  $r$ .

De plus, leurs séries de Taylor en  $z_0$  convergent (au moins) sur le disque centré en  $z_0$  s'étendant jusqu'au zéro de  $a_r$  le plus proche.

# Algorithme

Évaluation d'une série holonome dans son disque de convergence

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0 \quad a_r(0) \neq 0$$

$$y(z) = \sum_n y_n z^n \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^k$$

► Récurrence sur les **coefficients**

► Coefficients indéterminés

$$\begin{aligned} y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n \\ \frac{d}{dz} y(z) &= \sum_n (n+1) y_{n+1} z^n \\ z \cdot y(z) &= \sum_n y_{n-1} z^n \end{aligned}$$

$$b_s(n) y_{n+s} + \cdots + b_0(n) y_n = 0$$

# Algorithme

Évaluation d'une série holonome dans son disque de convergence

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0 \quad a_r(0) \neq 0$$

$$y(z) = \sum_n y_n z^n \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^k$$

► Récurrence sur les **coefficients**

$$b_s(n) y_{n+s} + \cdots + b_0(n) y_n = 0$$

# Algorithme

Évaluation d'une série holonome dans son disque de convergence

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0 \quad a_r(0) \neq 0$$

$$y(z) = \sum_n y_n z^n \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^k$$

- ▶ Récurrence sur les coefficients

$$b_s(n) y_{n+s} + \cdots + b_0(n) y_n = 0$$

- ▶ Récurrence sur les coefficients:

$$b_s(n) y_{n+s} + b_{s-1}(n) y_{n+s-1} + \cdots + b_0(n) y_n = 0$$

# Algorithme

Évaluation d'une série holonome dans son disque de convergence

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0 \quad a_r(0) \neq 0$$

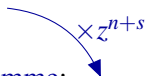
$$y(z) = \sum_n y_n z^n \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^k$$

- ▶ Récurrence sur les coefficients

$$b_s(n) y_{n+s} + \cdots + b_0(n) y_n = 0$$

- ▶ Récurrence sur les **termes de la somme**:

$$b_s(n) y_{n+s} z^{n+s} + z b_{s-1}(n) y_{n+s-1} z^{n+s-1} + \cdots + z^s b_0(n) y_n z^n = 0$$



# Algorithme

Évaluation d'une série holonome dans son disque de convergence

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0 \quad a_r(0) \neq 0$$

$$y(z) = \sum_n y_n z^n \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^k$$


- ▶ Récurrence sur les coefficients

$$b_s(n) y_{n+s} + \cdots + b_0(n) y_n = 0$$

- ▶ Récurrence sur les termes de la somme:

$$b_s(n) y_{n+s} z^{n+s} + z b_{s-1}(n) y_{n+s-1} z^{n+s-1} + \cdots + z^s b_0(n) y_n z^n = 0$$

- ▶ Récurrence sur les **sommes partielles** :

$$S_{n+1}(z) - S_n(z) = y_n z^n$$


# Algorithme

Évaluation d'une série holonome dans son disque de convergence

$$a_r(z) y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z) y'(z) + a_0(z) y(z) = 0 \quad a_r(0) \neq 0$$

$$y(z) = \sum_n y_n z^n \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k z^k$$

- ▶ Récurrence sur les coefficients

$$b_s(n) y_{n+s} + \cdots + b_0(n) y_n = 0$$

- ▶ Récurrence sur les termes de la somme:

$$b_s(n) y_{n+s} z^{n+s} + z b_{s-1}(n) y_{n+s-1} z^{n+s-1} + \cdots + z^s b_0(n) y_n z^n = 0$$

- ▶ Récurrence sur les sommes partielles :

$$S_{n+1}(z) - S_n(z) = y_n z^n$$

- ▶ Écriture matricielle, scindage binaire...

# Complexité I

Combien de termes sont nécessaires ?

► But :  $\left| y(z) - \sum_{n=0}^{N-1} y_n z^n \right| \leq 10^{-d}$

► Si  $|y_n| \leq \alpha^n \overbrace{\varphi(n)}^{\exp o(n)}$  alors  $\left| \sum_{n=N}^{\infty} y_n z^n \right| \leq |\alpha z|^N \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(N+n) |\alpha z|^n}^{\exp o(N)}$

► Rayon de convergence  $\rho = 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} |y_n|^{1/n}$   
 $\implies$  meilleur  $\alpha = 1/\rho$

► Conclusion:  $N \simeq \frac{d}{\log(\rho/|z|)}$

(Et l'on sait calculer un tel  $N$ , cf. bornes.)

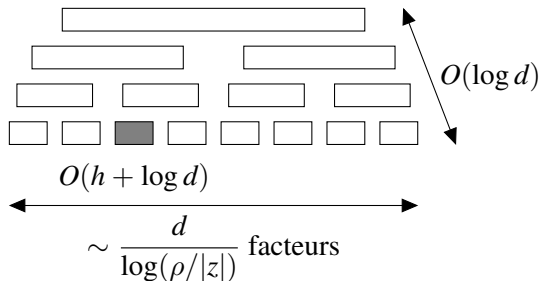


# Complexité II

## Coût du scindage binaire

Lors du calcul de  $y(z_1)$ , la récurrence dépend de  $z_1$  !

$h = \text{taille}(z_1)$



$$M \left( \frac{d (h + \log d)}{\log(\rho/|z|)} \right) \log d = \begin{cases} O(\mathbf{M}(d \log^2 d)) & \text{si } h = O(\log d) \\ \Omega(n^2) & \text{si } h = d \end{cases}$$

**Limitations :**  $|z_1| < \rho$ ;  $h = O(\log d)$

## Prolongement analytique effectif

- Base de solutions en  $z_0$

$$y_{[z_0, j]}(z) = (z - z_0)^j + \square \cdot (z - z_0)^r + \cdots \quad j \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$$

- Matrice de passage

$$M_{z_0 \rightarrow z_1} = \begin{bmatrix} y_{[z_0, 0]}(z_1) & \cdots & y_{[z_0, r-1]}(z_1) \\ y'_{[z_0, 0]}(z_1) & \cdots & y'_{[z_0, r-1]}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(r-1)!} y_{[z_0, 0]}^{(r-1)}(z_1) & \cdots & \frac{1}{(r-1)!} y_{[z_0, r-1]}^{(r-1)}(z_1) \end{bmatrix}$$

- Composition des matrices de passage  
= prolongement analytique

$$M_{z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \cdots \rightarrow z_m} = M_{z_{m-1} \rightarrow z_m} \cdots M_{z_1 \rightarrow z_2} \cdot M_{z_0 \rightarrow z_1}$$

# Évaluation par « *bit burst* »

Prolongement analytique le long du chemin

$$z_0 = 0 \rightarrow z_1 = 0.a_1$$

$$\rightarrow z_2 = 0.a_1a_2a_3$$

$$\rightarrow z_3 = 0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$$

$$\rightarrow z_4 = 0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}$$

$$\rightarrow \dots$$

$$\rightarrow z = 0.a_1a_2 \dots \dots \dots a_n$$

$$|z_{j+1} - z_j| \leq 2^{2-j}$$

Pas  $j$

$$O\left(M\left(\frac{n(h + \log n)}{\log(\rho/|\delta z|)} \log n\right)\right) \quad \begin{cases} h = O(2^j) \\ |\delta z| \leq 2^{2-j} \end{cases}$$

Coût total

$$O\left(\sum_{j=0}^{O(\log n)} M\left(\frac{n(2^j + \log n)}{2^j} \log n\right)\right) = O(M(n \log^2 n))$$

# Bornes



## Motivation (I)

- ▶ Problème : **calculer** les nombre de termes nécessaire ?
- ▶ [ChCh90] Ordres de grandeur uniquement
- ▶ [vdH99] Bornes « données par la formule de Cauchy »

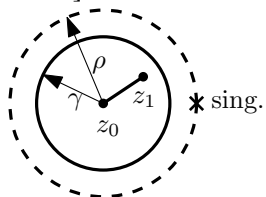


Diagram illustrating a complex plane with a singularity (marked with a star) at  $z_1$ . A point  $z_0$  is marked, and a contour  $\gamma$  is shown around it. A dashed circle of radius  $\rho$  is centered at  $z_0$  and encloses the singularity.

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} y_k z^k \right| \leq \left( \frac{|z|}{\gamma} \right)^n \varphi(n)$$

avec  $\gamma < \rho$  ( $\leq +\infty$  !)

- ▶ Idée : bornes dirigées par l'asymptotique



D.V. and G.V. Chudnovsky. Computer algebra in the service of mathematical physics and number theory. 1990.



J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions. 1999.

## Motivation (II)

► Permutations de Baxter (OEIS A001181)

- $(n+2)(n+3)B_n = (7n^2 + 7n - 2)B_{n-1} + 8(n-1)(n-2)B_{n-2}$ ,  
 $B_0 = B_1 = 1$
- $B_n \leq (n+8)^8 8^n$

► 
$$t_k = \frac{(-1)^k (6k)! (13591409 + 545140134k)}{(3k)! (k!)^3 640320^{3k}}$$

► 
$$\frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} t_k = \frac{1}{\pi} \quad (\text{Chudnovsky}^2 \text{ 1988})$$

► 
$$\left| \frac{640320^{3/2}}{12\pi} - \sum_{k=0}^{n-1} t_k \right| \leq (0,1n^4 + 0,5n^3 + 1,5n^2 + 2,1n + 1)\alpha^n$$

où 
$$\alpha = \frac{1}{151931373056000} \simeq 0,66 \cdot 10^{-14}$$

## Comportement asymptotique des récurrences

$$y_{n+s} + a_{s-1}(n) y_{n+s-1} + \cdots + a_1(n) y_{n+1} + a_0(n) y_n = 0$$



► bien définie

►  $a_k(n) \rightarrow a_k^\infty$

► réversible

quand  $n \rightarrow \infty$

$$y_{n+s} + a_{s-1}^\infty y_{n+s-1} + \cdots + a_1^\infty y_{n+1} + a_0^\infty y_n = 0$$

► polynôme caractéristique

$$X^s + a_{s-1}^\infty X^{s-1} + \cdots + a_0^\infty$$

### Théorème (Perron)

Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  les racines du polynôme caractéristique.

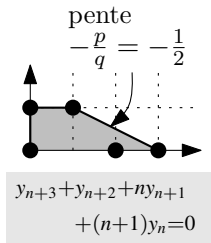
1. La récurrence ci-dessus admet une base de solutions  $y^{[k]}$  telles que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |y_n^{[k]}|^{1/n} = |\alpha_k|$ .
2. Si ces racines sont de modules deux à deux distincts, on a même  $y_{n+1}^{[k]} / y_n^{[k]} \rightarrow |\alpha_k|$ .

# Comportement asymptotique des récurrences II

Polygone de Newton, théorème de Perron-Kreuser

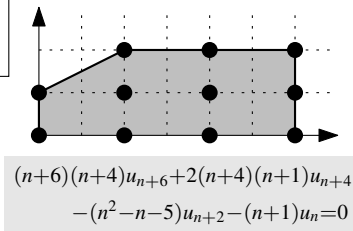
$$p_s(n) y_{n+s} + p_{s-1}(n) y_{n+s-1} + \cdots + p_1(n) y_{n+1} + p_0(n) y_n = 0$$

- $|p_k(n)/p_s(n)| \rightarrow \infty$  pour un  $k$   
ou tous les  $p_k(n)/p_s(n) \rightarrow 0$



$$u_n = \psi_n y_n$$

$$(n+q)^p \psi_{n+q} = \psi_n$$



En résumé :  $y_n \simeq n!^{p/q} \alpha^n$



# Objectif

Bornes « fines »

Entrée

Récurrance + conditions initiales

$$\{p_s(n) y_{n+s} + \dots + p_0(n) y_n = 0, \quad y_0 = \dots\}$$

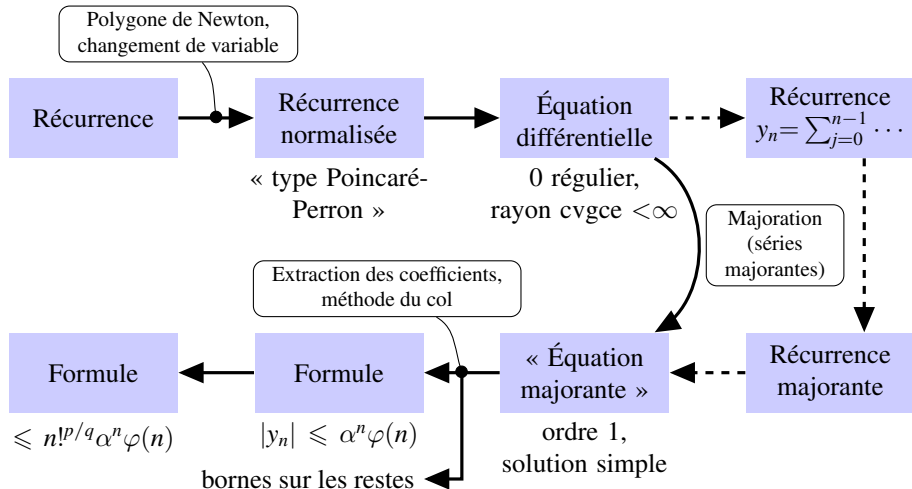
Sortie

$$|y_n| \leq n!^{p/q} \alpha^n \varphi(n)$$

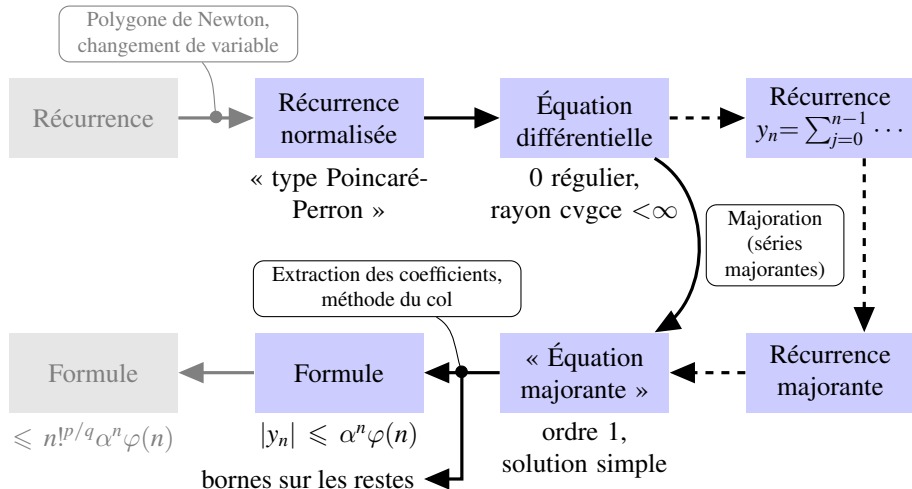
avec  $\varphi$  sous-exponentielle, i.e.  $\varphi(n) = e^{o(n)}$

- ▶ borne correcte
- ▶ pour des conditions initiales génériques :  
 $p/q$  et  $\alpha$  optimaux  
(voire  $\varphi(n) = n^{O(1)}$ )

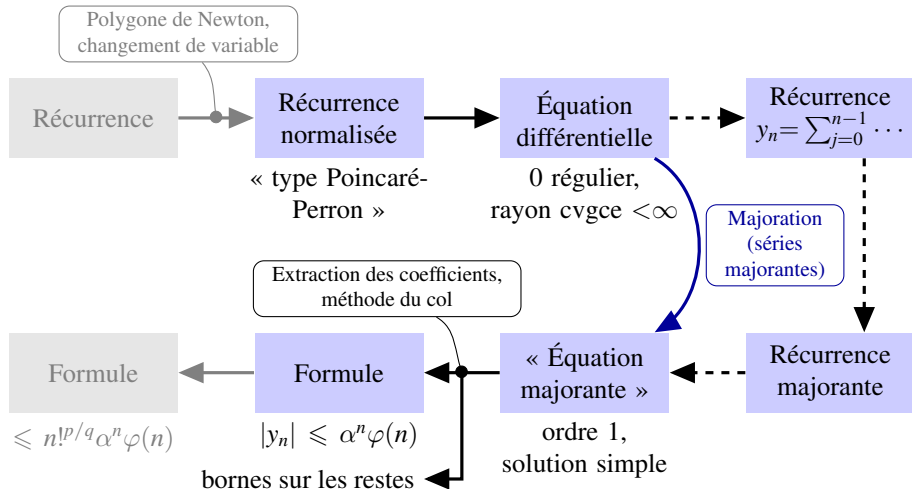
# Démarche



# Démarche



# Démarche



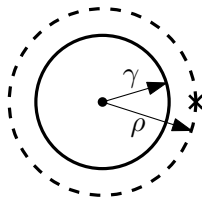
Préserver le rayon de convergence (et la nature de la singularité dominante)

# Séries majorantes

## Méthode de Cauchy-Kovelevskaïa : échauffement

$$y'(z) = a(z)y(z) \quad a(z) \text{ analytique pour } |z| < \rho$$

- ▶  $(n+1)y_{n+1} = \sum_{j=0}^n a_j y_{n-j}$
- ▶ Soit  $M$  tel que  $\forall j, |a_j| \leq M/\gamma^j$ , considérons  $(n+1)g_{n+1} = \sum_{j=0}^n M\gamma^{-j}g_{n-j}$  ;
- ▶ on a alors  $g'(z) = M(1 - z/\gamma)^{-1}g(z)$   
donc  $g(z) \propto (1 - z/\gamma)^{-\gamma M}$ .
- ▶ Par récurrence  $|y_0| \leq g_0 \implies \forall n, |y_n| \leq g_n$
- ▶ or  $g(z)$  est analytique pour  $|z| < \gamma$  ( $\rightarrow \rho$ ).  $\square$



J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities. 2001.



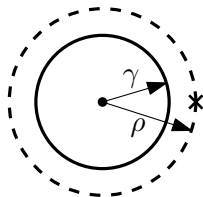
J. van der Hoeven. Majorants for formal power series. 2003.

# Séries majorantes

Méthode de Cauchy-Kovelevskaïa : échauffement

$$y'(z) = a(z)y(z) \quad a(z) \text{ analytique pour } |z| < \rho$$

- ▶  $(n+1)y_{n+1} = \sum_{j=0}^n a_j y_{n-j}$
- ▶ Soit  $M$  tel que  $\forall j, |a_j| \leq M/\gamma^j$ , considérons  $(n+1)g_{n+1} = \sum_{j=0}^n M\gamma^{-j}g_{n-j}$  ;
- ▶ on a alors  $g'(z) = M(1 - z/\gamma)^{-1}g(z)$   
donc  $g(z) \propto (1 - z/\gamma)^{-\gamma M}$ .
- ▶ Par récurrence  $|y_0| \leq g_0 \implies \forall n, |y_n| \leq g_n$
- ▶ or  $g(z)$  est analytique pour  $|z| < \gamma$  ( $\rightarrow \rho$ ).  $\square$



## Difficultés

- ▶ On veut  $\gamma = \rho$
- ▶ 0 singulier rég.



J. van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities. 2001.



J. van der Hoeven. Majorants for formal power series. 2003.

# Équation différentielle majorante

$$z^r y^{(r)} - c_{r-1} z^{r-1} y^{(r-1)} - \dots - c_0 y \\ = z^r a^{[r-1]}(z) y^{(r-1)} + z^{r-1} a^{[r-2]}(z) y^{(r-2)} + \dots + z a^{[0]}(z) y$$

$$q(n) y_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} a_{n-1-j}^{[k]} j^k y_j$$

$$|a_n^{[k]}| \leq [z^n] \frac{M_k}{(1 - \alpha z)^{r-k+T}} \\ (T = \text{irrégularité})$$

$$g_n = \frac{K}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{(n-1-j)+T}{T} \alpha^{n-j} g_j$$

$$g'(z) = \frac{\alpha K}{(1 - \alpha z)^{1+T}} g(z)$$

# Équation différentielle majorante

$$z^r y^{(r)} - c_{r-1} z^{r-1} y^{(r-1)} - \dots - c_0 y \\ = z^r a^{[r-1]}(z) y^{(r-1)} + z^{r-1} a^{[r-2]}(z) y^{(r-2)} + \dots + z a^{[0]}(z) y$$

$$q(n) y_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} a_{n-1-j}^{[k]} j^k y_j$$

$$|a_n^{[k]}| \leq [z^n] \frac{M_k}{(1 - \alpha z)^{r-k+T}} \\ (T = \text{irrégularité})$$

Pour  $n$  assez grand :

$$|y_n| \leq \frac{1}{|q(n)|} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{r-1} M_k \binom{(n-1-j)+(r-k+T-1)}{r-k+T-1} j^k \right) \alpha^{n-1-j} |y_j|$$

$$\leq \underbrace{\frac{M n^{r-1}}{|q(n)|}}_{\leq K/n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{(n-1-j)+T}{T} \alpha^{n-j} |y_j|$$

$$q(n) = n^r + \dots$$

$$g_n = \frac{K}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{(n-1-j)+T}{T} \alpha^{n-j} g_j$$

$$g'(z) = \frac{\alpha K}{(1 - \alpha z)^{1+T}} g(z)$$



## Séries majorantes « fines »

Équation majorante :  $g'(z) = \frac{\alpha K}{(1 - \alpha z)^{1+T}} g(z)$

$$\boxed{T = 0} \quad g(z) = \frac{A}{(1 - \alpha z)^K}$$

$$|y_n| \leq g_n = A \binom{n + K - 1}{K - 1} \alpha^n$$

$$\boxed{T > 0} \quad g(z) = A \exp \frac{K/T}{(1 - \alpha z)^T}$$

$$|y_n| \leq g_n \leq A \exp (C n^{T/(T+1)}) \alpha^n \quad \text{pour } n \geq N$$

(méthode du col)

Bonus : bornes sur les restes, sur les dérivées

## Influence sur l'évaluation numérique

	$ \sum_{k=n}^{\infty} y_k z^k  \leq \dots$	Nombre de termes
Cas général ( $\rho < \infty$ )	$A \left(\frac{ z }{\rho}\right)^n \exp(Kn^\beta)$ ( $0 \leq \beta < 1$ )	} $\frac{p}{\log(\rho/ z )} + o(p)$
Point singulier régulier	$A \left(\frac{ z }{\rho}\right)^n n^N$	
$\rho = \infty$	$\frac{A}{n!^{1/N}}$	$O\left(\frac{p}{\log p}\right)$

# Influence sur l'évaluation numérique

Nombre de chiffres décimaux corrects

		$\arctan \frac{1}{2}$	$\arctan \frac{3}{4}$	$\frac{\cos z}{1-z}, z = \frac{1}{3}$	$(\alpha C + \beta S)(\frac{\pi}{3}) (*)$
100	M.	104	104	103	104
	vdH01	177	194	165	167
1000	M.	1004	1005	1004	1006
	vdH01	1716	1874	1591	1595

(\*)  $\{(1-z^2)y''(z) - zy'(z) + 2(1-2z^2)y(z) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0\}$   
 (forme algébrique de l'équation de Mathieu) en  $z = 1/2$ .

		$\exp \frac{z}{1-z^2}, z = \frac{1}{3}$	$\operatorname{erf} \frac{z}{1-z}, z = \frac{1}{3}$	$e^{-100}$	$\operatorname{Ai}(4i + 4)$
100	M.	107	123	102	238
	vdH01	152	146	316	357
1000	M.	1015	1081	1003	1764
	vdH01	1555	1501	> 4000	> 4000

Attention : résultats pour une variante des bornes précédentes !

## Résumé

1. Évaluation à grande précision de fonctions holonomes générales
2. Calcul entièrement automatique de bornes fines sur les suites holonomes
3. Code disponible

## Quelques questions & perspectives

- ▶ Implémentation efficace en pratique (Mathemagix ?)
- ▶ Comment dérouler efficacement quand l'ordre de la récurrence croît ?
- ▶  $n!$  se calcule en temps  $O(M(n \log n))$  [Schönhage] : généralisations possibles ?
- ▶ Détermination automatique des chemins de prolongement analytique
- ▶ Évaluation aux points singuliers
- ▶ Encadrements plutôt que bornes supérieures ?

Ce document est placé dans le domaine public par son auteur, partout dans le monde. Dans le cas où cela serait impossible légalement, en tant qu'auteur de ce document, je donne à quiconque l'autorisation expresse d'utiliser ce travail pour toutes fins et sans aucune condition à moins que ces conditions ne soient imposées par la loi.

I, the author of this work, hereby release it into the public domain. This applies worldwide. In case this is not legally possible: I grant anyone the right to use this work for any purpose, without any conditions, unless such conditions are required by law.