Résolution numérique d'équations différentielles à singularités apparentes
Numerical Solution of ODEs with Apparent Singularities

Thématique : calcul formel, calcul numérique rigoureux
Cadre : LIP6, Sorbonne Université, campus de Jussieu, Paris, équipe Pequan
Encadrant : Marc Mezzarobba <marc.mezzarobba@lip6.fr>
Prérequis : bases d'analyse complexe et de programmation

English Summary

The aim of this project will be to develop new algorithms for the rigorous high-precision numerical solution of differential equations with polynomial coefficients that behave well in the presence of so-called apparent singularities. Apparent singularities are points where the equation is singular, forcing existing solvers to use expensive techniques compared to the non-singular case, even though the solutions are regular.

Challenging examples coming from applications typically have a large number of apparent singularities. By either transforming the equation to remove these singularities or adapting the algorithms to recognize and handle them specifically, one can hope to significantly improve the performance of numerical solution algorithms on an important class of equations.

Présentation générale du domaine

Ce stage se situe à l'intersection des domaines du calcul formel et du calcul numérique rigoureux. L'objectif général est de rendre algorithmiques et efficaces les opérations sur les objets mathématiques usuels, représentés de façon exacte (rationnels, nombres algébriques, polynômes…) ou, à défaut, approchés à précision arbitraire et si possible avec une borne sur l'erreur commise (réels, fonctions réelles, séries…). Un point important est que l'on cherche à effectuer les calculs à un niveau de rigueur acceptable dans une preuve mathématique informelle. Cela s'oppose à la démarche usuelle du calcul scientifique, qui opère en général sur des réels approchés par des nombres en virgule flottante à précision machine, sans trop se préoccuper des détails des erreurs d'approximation ou d'arrondi tant que celles-ci restent raisonnables. Par ailleurs, certaines applications nécessitent des calculs bien plus précis que ce que permet la précision machine. Ainsi, des précisions de plusieurs milliers de chiffres sont utiles pour conjecturer ou pour tester numériquement certains résultats de mathématiques ou de physique théorique.

Objectifs du stage

On s'intéressera à la résolution numérique d'équations différentielles

$$a_r(z)\, y^{(r)}(z) + \cdots + a_1(z)\, y'(z) + a_0(z)\, y(z) = 0 \tag{1}$$

« du point de vue du calcul formel », c'est-à-dire à précision arbitraire, avec des bornes d'erreurs rigoureuses, et en s'autorisant des outils de calcul exact et non seulement numérique.

Dans l'équation ci-dessus, l'inconnue y est une fonction d'une variable complexe et les coefficients $a_0, \ldots, a_r$ sont des polynômes. À partir de conditions initiales $y(0), \ldots, y^{(r-1)}(0)$ qui déterminent une solution, on cherche à calculer la valeur de cette solution en un point $\zeta \in \mathbb{C}$ donné. Si par exemple $a_r(t\,\zeta) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, la question a un sens car le théorème d'existence de Cauchy (variante complexe du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire) garantit l'existence d'une base de solutions holomorphes au voisinage de chaque point. Il est possible de généraliser le problème à des cas singuliers, i.e. où le coefficient de tête a_r s'annule, moyennant des outils un petit peu plus sophistiqués.

Des algorithmes connus permettent de calculer $y(\zeta)$ assez efficacement, y compris à très grande précision [5], dans les cas singuliers [9, 10], et en déterminant automatiquement toutes les bornes d'erreur nécessaires [7].

Cependant, les équations provenant d'applications (par exemple [8, 6]) présentent souvent un grand nombre de *singularités apparentes*, c'est-à-dire de points ξ où a_r s'annule alors même que l'équation admet une base de solutions formée de fonctions holomorphes[1] en ξ. Dans l'état actuel des connaissances, cela oblige à utiliser grosso modo les mêmes méthodes qu'en présence de « vraies » singularités, ce qui augmente le coût du calcul.

De plus, la présence de singularités apparente est liée à celle de coefficients $a_0, \ldots, a_r$ de degré élevé [3]. En particulier, quand une équation E a de nombreuses singularités apparentes, il existe souvent une autre équation d'ordre à peine plus élevé mais à coefficients de degrés considérablement plus petits qui admet parmi ses solutions toutes les solutions de E. Or les algorithmes de résolution sont assez sensibles à la taille de l'équation différentielle, avec une complexité quadratique à cubique suivant les méthodes utilisées.

L'objectif de ce stage est de développer des algorithmes spécifiques capable de traiter plus efficacement les singularités apparentes. Vous devrez explorer tout ou partie des pistes suivantes.

- Utiliser un algorithme de désingularisation pour remplacer automatiquement l'équation fournie par l'utilisateur par une équation « équivalente » plus compacte et sans singularités apparentes [3, 4]. Une application naïve des méthodes connues de désingularisation conduit à des équations extrêmement difficiles à évaluer : il faudra donc comprendre si cette difficulté est intrinsèque ou s'il est possible d'adapter les algorithmes pour la contourner.
- Au lieu de chercher une équation dont l'espace des solutions *contient* celui de l'équation initiale, essayer d'en construire une dont les solutions sont *images* des solutions de départ par une transformation facilement inversible. Il est connu que l'on peut débarrasser de leurs singularités apparentes les systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 de cette manière [1] ; est-il possible d'utiliser la même idée pour rendre les solutions d'une équation scalaire de la forme (1) plus faciles à évaluer ?
- Améliorer le calcul automatique de bornes d'erreur au cours de la résolution numérique [7]. Celui-ci donne en effet actuellement des bornes très pessimistes en présence de singularités apparente ; la question est de les détecter et de prendre en compte leur nature afin d'obtenir des bornes plus fines et ainsi une résolution numérique plus efficace.

Bibliographie

[1] Moulay A. Barkatou and Suzy S. Maddah. Removing Apparent Singularities of Systems of Linear Differential Equations with Rational Function Coefficients. In *Proceedings of the 2015 ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '15, pages 53–60, New York, NY, USA, 2015. ACM. URL: http://doi.acm.org/10.1145/2755996.2756668, doi:10.1145/2755996.2756668.

[2] Alin Bostan, Frédéric Chyzak, Marc Giusti, Romain Lebreton, Grégoire Lecerf, Bruno Salvy, and Éric Schost. *Algorithmes efficaces en Calcul formel*. 2017. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/AECF/.

[3] Shaoshi Chen, Maximilian Jaroschek, Manuel Kauers, and Michael F. Singer. Desingularization Explains Order-degree Curves for Ore Operators. In *Proceedings of the 38th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '13, pages 157–164, New York, NY, USA, 2013. ACM. URL: http://doi.acm.org/10.1145/2465506.2465510, doi:10.1145/2465506.2465510.

[4] Shaoshi Chen, Manuel Kauers, and Michael F. Singer. Desingularization of Ore operators. *Journal of Symbolic Computation*, 74:617–626, May 2016. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717115000991, doi:10.1016/j.jsc.2015.11.001.

[5] David V. Chudnovsky and Gregory V. Chudnovsky. Computer algebra in the service of mathematical physics and number theory. In David V. Chudnovsky and Richard D. Jenks, editors, *Computers in Mathematics*, volume 125 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pages 109–232. Dekker, 1990. Talks from the International Conference on Computers and Mathematics, Stanford University, 1986.

[6] Pierre. Lairez and Emre Can. Sertöz. A Numerical Transcendental Method in Algebraic Geometry: Computation of Picard Groups and Related Invariants. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, pages 559–584, January 2019. URL: https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/18M122861X, doi:10.1137/18M122861X.

[7] Marc Mezzarobba. Truncation bounds for differentially finite series. *Annales Henri Lebesgue*, 2:99–148, 2019. URL: https://ahl.centre-mersenne.org/item/AHL_2019__2__99_0, doi:10.5802/ahl.17.

[8] Emre Can Sertöz. Computing Periods of Hypersurfaces. Technical Report 1803.08068, arXiv, March 2018. URL: http://arxiv.org/abs/1803.08068, arXiv:1803.08068.

[9] Joris van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities. *Journal of Symbolic Computation*, 31(6):717–743, 2001. URL: http://www.texmacs.org/joris/singhol/singhol-abs.html, doi:10.1006/jsco.2000.0474.

1. Un exemple simple est fourni par l'équation du premier ordre $z\,y'(z) = y(z)$, dont les solutions sont les $y(z) = \lambda\,z$, $\lambda \in \mathbb{C}$, et n'ont donc pas de singularité en 0, quand bien même le théorème de Cauchy ne s'applique pas.

[10] Joris van der Hoeven. Efficient accelero-summation of holonomic functions. *Journal of Symbolic Computation*, 42(4):389–428, 2007. URL: `http://www.texmacs.org/joris/reshol/reshol-abs.html`, `doi:10.1016/j.jsc.2006.12.005`.